

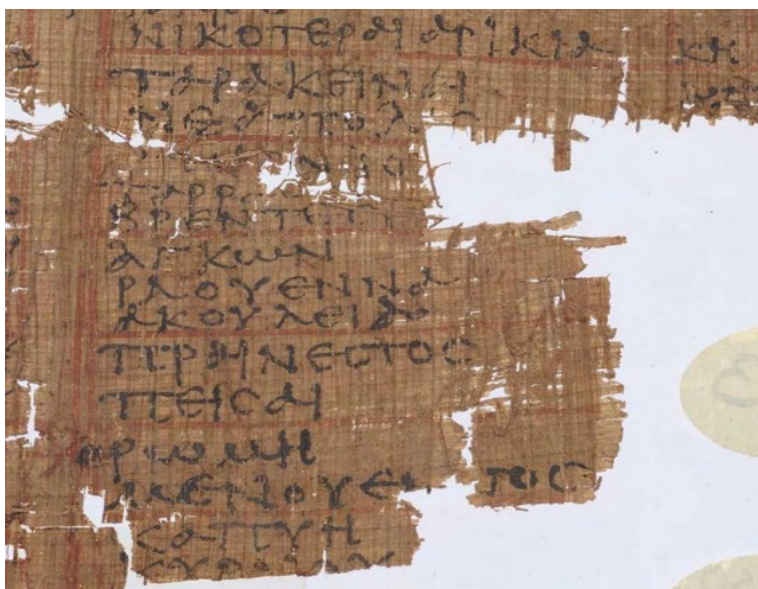
Le città italiane nelle Tavole Facili di Tolomeo

Dopo le considerazioni matematiche sulle cosiddette 'città importanti' italiane del Libro VIII della *Geographike Hyphegesis* di Tolomeo, chiudo l'argomento con qualche assaggio matematico-statistico delle città italiane elencate nel Canone tolemaico o Tavole delle città degne di nota (κανὼν πόλεων ἐπισήμων), che formano parte integrante delle Tavole Facili (πρόχειροι κανόνες), una compilazione di carattere astronomico intesa ad aiutare i destinatari (probabilmente astrologi) a calcolare per esempio le ascensioni rette e oblique o le eclissi solari e la fasi dei pianeti. Mentre i più antichi codici della Geografia superstiti risalgono a non prima del XIV secolo, per le Tavole delle città è disponibile un frammento papiraceo (piuttosto malconcio) datato al III secolo, posteriore di appena un centinaio d'anni a Tolomeo. Il Papiro Rylands 522 contiene al verso una lista di toponimi con relative coordinate geografiche, simile a quella del Libro VIII della Geografia salvo che longitudine e latitudine sono espresse in gradi e minuti (sulla falsariga dei Libri 2-7 della Geografia) anziché in giorni solstiziali e distanze orarie da Alessandria.

Oltre al Papiro Rylands 522 i più antichi testimoni del Canon Poleon Episenon sono quattro codici bizantini compilati tra IX e X secolo:

- Leidensis BPG 78 (copiato durante il regno di Leone V, 813-820)
- Vaticanus gr. 1291 (copiato durante il regno di Teofilo, 829-842)
- Laurentianus 28-26 (copiato durante il regno di Leone VI, 886-912)
- Marcianus gr. 331 (copiato forse durante il regno di Leone VI, 886-912).

I codici che riprendono la disposizione stilistica del Papiro (come il Laurentianus 28-26 che utilizzo nel seguito) hanno il folio diviso in due blocchi delimitati da doppie linee rosse. Questi due blocchi sono composti ciascuno da tre colonne (nomi di luoghi, longitudini, latitudini) separate da linee rosse semplici. Ecco il confronto delle città italiane corrispondenti tra Papiro Rylands 522 (non si sono conservate le coordinate) e il MS Laurentianus 28-26



Ἰταλίας		
ΝΙΚΑΙΑ	κ η	μ γ β
ΤΑΡΑΚΕΙΝΑ	λ ε δ	μ α δ
ΜΕΛΙΤΗ	μ	μ γ δ
ΕΠΙΔΙΟΥΛΙΟΝ	λ θ σ	λ η δ
ΤΑΡΑΝΤΟ	μ α δ	μ
ΒΕΝΕΤΙΑ	μ β δ	λ θ ς
ΑΓΑΦΗ	λ ε δ	μ γ ς
ΕΛΟΥΣΙΝΑ	λ θ ς	μ δ
ΔΑΔΑΝΙΔΑ	λ δ	μ β
ΡΩΜΗ	λ σ ς	μ α ς
ΒΕΝΕΤΙΑ	μ α	μ α ς
ΠΕΡΟΥΣΙΑ	λ ε δ	μ α δ
ΠΙΣΑ	μ	μ α ς
ΚΑΡΥΗ	λ α δ	μ β δ
ΚΥΡΕΝΟΥΣ	λ α δ	μ β δ
ΔΑΙΡΕΙΑ	λ α δ	μ β δ

Da sottolineare che, rispetto ai quattro codici bizantini, il Libro VIII della Geografia non menziona Rhegium Iulium (Reggio Calabria), Pisa, Preneste, Palermo e Termini Imerese. Non ci sono inoltre parentele filologiche evidenziabili tra Papiro Rylands 522 e i codici medievali.

Questo il contenuto del Laurentianus 28-26 per le città illustri italiane:

	Long.	Lat.
NIKAIA (Nizza)	24°	43° 5'
TARRAKINAI (Terracina)	47° 45'	46° 4'
NEAPOLIS (Napoli)	40°	45° 4'
REGHION IOULION (Reggio Calabria)	39° 30'	38° 15'
TARAS (Taranto)	41° 6'	40°
BRENTESION (Brindisi)	42° 30'	39° 20'
AYKON (Ancona)	36° 30'	43° 20'
RAOUENNA (Ravenna)	34° 20'	44°
AKOULEIA (Aquileia)	34°	45°
ROME	36° 20'	41° 20'
BENEBENDOS (Benevento)	41°	41° 20'
PRENETOS (Preneste)	37°	41° 45'
PISSAI (Pisa)	33° 30'	42° 45'
KAPUE (Capua)	40°	41° 20'
ALEREIA (Aleria)	31° 30'	40° 5'
MARIANE (Mariana)	31° 20'	40° 20'
SOLKOI (Sant'Antioco)	37° 20'	35° 20'
KARALLIS (Cagliari)	32° 20'	36°
PYRGO LYBISONO (Torre Libisone)	34° 20'	38° 50'
GOURULLIS NEA (Cuglieri?)	33°	37° 50'
LILYBAION (Marsala)	37°	36°
SYRAKOUSAS (Siracusa)	39° 30'	37°
MESSENE (Messina)	39° 30'	38° 20'
KENTOURIPPA (Centuripe)	38° 30'	37° 50'
SEGESTA	37° 5'	36° 30'
PANORMOS (Palermo)	37°	37°
KATANE (Catania)	37° 50'	37° 20'
THERMAI HIMAIAI (Termini Imerese)	37° 5'	37° 15'

πύλειωσιν μοι		ἔν ρῶπῃ C		πύλειωσιν μοι		
μ	π	μ	π	μ	π	
ἡμῶνα πόλιν	λ γ	με δ	με δ	μαριδνῆς	λα γ	με γ
καρμουῶτος	λ θ	μ δ	μ δ	καρδουσμήσαν.	λ ε γ	λ β γ
παγγονία ἐκόντῃ				σολήκοι	λ ε γ	λ β γ
σφρίτιον.	μα γ	με γ	με γ	καρδάλια	λ β γ	λ γ
κίβδαλα	μα γ	με γ	με γ	πύργλιβύσων	λ α γ	λ κ γ
μούρσαι	μα γ	με γ	με γ	ῥῶπτις διγαλκί.	λ α γ	μ γ
οἰεσθῆς	μα γ	με γ	με γ	βριγύτιον	λ β γ	μ γ
ῥαυρίλιβῆς δαλμα				δύτουσβινδαλκί.	λ γ	λ ε γ
ιδάδερα	μα β	με γ	με γ	τουεγλῆς	λ γ	λ ε γ
σολῶμα	μα γ	με γ	με γ	πύπουλ) πόλιν	λ γ	λ γ β
σιδραῶν.	μα β	με γ	με γ	στικαλίας μήσαν.		
καρδωνῶν δαυρ.	μα γ	με γ	με γ	λιανύραμον.	λ ε	λ γ
σφρίτιον	μα γ	με γ	με γ	σνε δκουσα.	λ θ	λ ε
ιταλία	μα γ	με γ	με γ	μεστῆς	λ θ	λ κ γ
μικαλίας	κ η	με γ	με γ	κεμῆουεππα	λ κ	λ ε γ
καρδάλια	λ ε γ	μα γ	μα γ	εἴγετα	λ ε β	λ γ
μεσπελις	μα	με γ	με γ	πύπουρμα.	λ ε	λ ε
ῥηγιδιούλιον	λ θ	λ κ	λ κ	κατῶν	λ θ	λ γ
τῶρα	μα γ	μα	μα	θεσμάμας	λ ε β	λ ε
βριγύτιον	μα γ	λ θ	λ θ	σφρίτιον	μ θ	μ κ
δγαφῆ	λ γ	με γ	με γ	πύπουρμα	μ κ	μ
εαούρνα	λ α	μ δ	μ δ	ιανθία	μ ε	μ
δαδλῆς	λ α	μα γ	μα γ	πύπουρμα	ε γ	μ γ
ῥῶμα	λ α	μα γ	μα γ	θδ δασίς	ε γ	μ γ
βριγύτιον	μα γ	μα γ	μα γ	πύπουρμα	ε γ	μ γ
πύπουρμα	λ γ	μα γ	μα γ	ιδυγῆμας	ε γ	μ γ
κατῶν	μα	μα γ	μα γ	βριγύτιον	μ γ	λ κ
πύπουρμα	μα	μα γ	μα γ	πύπουρμα	μ γ	λ κ
δαδλῆς	λ α	μα γ	μα γ	πύπουρμα	μ γ	λ κ
ῥῶμα	λ α	μα γ	μα γ	πύπουρμα	μ γ	λ κ

Premetto alle schede matematico-statistiche di ogni città un sunto sul problema delle longitudini in Tolomeo, vera spina nel fianco di ogni ricostruzione geodetica e cartografica della visione del mondo nell'antichità. Nel seguito ricorrerò al 'trucco' di rapportare la longitudine tolemaica al meridiano di Greenwich con una trasformazione affine, così da mostrare, tutto sommato, la coerenza interna dell'apparato teorico dello studioso di Alessandria.

La determinazione della longitudine nell'antichità rappresenta un nodo teorico e pratico che mette alla prova le capacità osservazionali e i modelli astronomici a disposizione di uno scienziato come Claudio Tolomeo (II secolo d.C.). In questo saggio indagheremo il concetto tolemaico di longitudine, i metodi teorici e pratici proposti (eclissi lunari, culminazioni stellari, distanze lunari e dati di viaggio), le conseguenze matematiche e astronomiche di tali metodi e la quantificazione degli errori — sia aleatori che sistematici. Presenteremo inoltre strumenti di analisi statistica (modelli di regressione per stimare bias e scala) e formule di trigonometria sferica utili a convertire osservazioni e distanze in differenze di longitudine. L'obiettivo è fornire un quadro tecnico e riproducibile che chiarisca perché le longitudini di Tolomeo risultino così spesso distorte rispetto ai valori moderni.

1. Concetto matematico di longitudine e notazione

Sia λ la longitudine geografica di un luogo, misurata come angolo sull'equatore rispetto a un meridiano di riferimento. Tolomeo fissò convenzionalmente il meridiano zero sulle isole dette «Fortunate» (Canarie). Misuriamo λ in gradi ($^\circ$), con segno positivo verso est.

La relazione fondamentale che lega longitudine e tempo è immediata, dato che la Terra compie una rotazione di 360° in 24 ore:

$$\omega = 360^\circ / (24 \text{ h}) = 15^\circ / \text{h}$$

Se due località A e B osservano lo stesso evento astronomico in istanti locali t_A e t_B (ore equinoziali, cioè ore di eguale durata), la differenza di longitudine è:

$$\Delta\lambda = \lambda_A - \lambda_B = \omega \cdot (t_A - t_B)$$

Questa formula è il cardine teorico: per ottenere $\Delta\lambda$ occorre misurare — o inferire — una differenza di tempo $t_A - t_B$.

2. Metodi astronomici praticabili nell'antichità

2.1 Eclissi lunari (metodo diretto)

Un'eclissi di Luna è, in prima approssimazione, un evento istantaneo nello stesso istante fisico per tutti gli osservatori (modifiche locali di visibilità escluse). Se due osservatori registrano istanti locali t_A , t_B dell'inizio o della massima fase, la precedente formula fornisce $\Delta\lambda$. L'eleganza del metodo non cancella due problemi pratici:

Rarità: le eclissi non avvengono frequentemente in modo favorevole.

Precisione temporale: la misura del tempo locale richiede strumenti (clessidre, meridiane) la cui accuratezza è limitata, e l'osservazione umana introduce reazioni di secondi o minuti.

Propagazione dell'errore (timing $\rightarrow$ longitudine)

Sia σ_t l'incertezza nel determinare la differenza temporale $t_A - t_B$. Allora l'incertezza corrispondente in longitudine è:

$$\sigma\lambda = \omega \cdot \sigma_t = 15^\circ/\text{h} \times \sigma_t$$

Esempio:

Prendiamo un errore di $\sigma_t = 5$ minuti.

Convertiamo 5 minuti in ore: $5 \text{ min} = 5/60 \text{ h} = 0,083333 \text{ h}$.

Moltiplichiamo per ω : $\sigma\lambda = 15^\circ/\text{h} \times 0,083333 \text{ h} = 1,25^\circ$.

Concludiamo: 5 minuti di errore temporale $\Rightarrow 1,25^\circ$ di errore in longitudine.

Per collegare l'errore angolare a una distanza lineare all'equatore, usiamo il raggio terrestre medio R . Con $R \approx 6371 \text{ km}$ la circonferenza terrestre $C = 2\pi R \approx 40030,17 \text{ km}$, e dunque:

$$1^\circ = C/360 \approx 40030,17/360 \approx 111,195 \text{ km}$$

Calcolo per $1,25^\circ$:

$$111,195 \text{ km} \times 1,25 = 138,99375 \text{ km}.$$

Quindi 5 minuti di errore corrispondono a circa 139 km di errore all'equatore; su latitudini medie europee l'effetto in km per grado si riduce del fattore $\cos(\varphi)$.

2.2 Culminazioni stellari e tempo siderale locale

Un altro principio teorico è la determinazione del tempo attraverso le culminazioni (passaggi al meridiano) di stelle note. Se un osservatore registra il tempo locale t_{obs} della culminazione di una stella di ascensione retta α , il tempo siderale locale LST è:

$LST = \alpha$ (al momento della culminazione, l'angolo orario è zero)

Conoscendo l'equivalente della LST per il meridiano di riferimento in un istante fisso, la differenza di LST fornisce la differenza di longitudine. Questo metodo richiede però conoscenze accurate delle ascensioni rette delle stelle e la possibilità di misurare con sicurezza il momento della culminazione.

2.3 Metodo della distanza lunare (lunar-distance)

In linea teorica un osservatore può misurare l'angolo D tra la Luna e una stella (o il Sole); dal modello astronomico si trova istanti t al meridiano di riferimento tali che la distanza predetta $D_{mod}(t)$ coincide con l'osservata. La differenza $t_{locale} - t$ fornisce Δt . Questo è il principio del metodo della distanza lunare usato con successo dai navigatori moderni, ma richiede:

un'effemeride lunare accurata;

la capacità di misurare D con buona precisione (alcuni primi d'arco).

Applichiamo un'analisi quantitativa della sensibilità.

Velocità angolare della Luna (relativa alle stelle)

Usiamo il periodo sidereo della Luna $T_{sid} \approx 27,321661$ giorni. La velocità angolare media rispetto allo sfondo stellare è:

$$\theta = 360^\circ / T_{sid}$$

Calcolo passo-passo:

$$T_{sid} = 27,321661 \text{ d.}$$

$$360^\circ / 27,321661 \approx 13,1763^\circ/\text{giorno. (verifica: } 27,321661 \times 13,1763 \approx 360.)$$

$$\text{In ore: } 13,1763^\circ / (24 \text{ h}) \approx 0,5490^\circ/\text{h.}$$

Quindi la Luna si muove mediamente di circa $0,549^\circ$ all'ora rispetto alle stelle (circa $33'/\text{h}$).

Sensibilità temporale a un errore angolare in D

Se la misura angolare del distanziamento lunare ha errore σ_D (in gradi), la corrispondente incertezza temporale approssimativa è:

$$\sigma_t \approx \sigma_D / \theta$$

Esempio numerico:

Supponiamo $\sigma_D = 10'$ (dieci primi d'arco) $= 10/60^\circ = 0,1666667^\circ$.

$\theta = 0,5490125^\circ/\text{h}$ (da sopra).

Divisione: $\sigma_t = 0,1666667/0,5490125 \approx 0,3036 \text{ h}$.

Convertiamo in minuti: $0,3036 \text{ h} \times 60 = 18,216 \text{ min}$.

Ora la conversione in errori di longitudine:

$$\sigma_\lambda = 15^\circ/\text{h} \times \sigma_t = 15 \times 0,3036 \approx 4,553^\circ$$

Calcolo km (all'equatore): $4,553 \times 111,195 \approx 506,4 \text{ km}$.

Interpretazione: una misura angolare della distanza Luna-stella con incertezza di $10'$ si traduce in un errore di longitudine dell'ordine di $4,5^\circ$, cioè centinaia di chilometri. Per ottenere errori entro 1° occorrerebbe misure angolari migliori di circa $2'-3'$, qualità raggiungibile solo con strumenti di precisione ben oltre il livello corrente nell'antichità.

2.4 Dati di viaggio e stime di percorrenza

Tolomeo e i geografi antichi spesso convertirono in longitudine i tempi di viaggio riportati (ore o giorni) o le distanze nautiche. Nel passaggio da distance/time a differenza di longitudine è necessaria la conoscenza della velocità media e della latitudine (per convertire distanza percorsa in arcose sull'equatore). Questo procedimento introduce sia errori grandi e non gaussiani sia una possibile scala (fattore di compressione/espansione) sistematica dovuta a ipotesi sulla velocità e su rotte non parallele all'equatore.

3. Effetti astronomici specifici che influenzano la precisione

3.1 Parallasse lunare

La Luna ha una parallasse orizzontale massima p dovuta alla vicinanza alla Terra. La parallasse massima è circa:

$$p \approx \arcsin(R_\oplus/d_{\text{Luna}}) \approx 57' - 1^\circ$$

(ordine di grandezza: $\sim 0,95^\circ$). Ciò significa che l'apparente posizione della Luna può essere spostata di quasi 1° a seconda del luogo di osservazione. Se si usa la distanza Luna-stella senza correggere per la parallasse locale, l'errore risultante può essere enorme (più di un grado).

3.2 Equazione del tempo e ora apparente vs ora media

Se Tolomeo misurava il tempo locale con meridiane (ora apparente), esiste una differenza tra ora apparente e ora media (equation of time) che può raggiungere $\pm 15-16$ minuti nell'anno solare: un errore fino a $\sim 4^\circ$ equivalenti in longitudine se non corretta. Per eventi come eclissi lunari però questo effetto

non interviene direttamente, poiché si tratta di istanti assoluti; ma per metodi basati sul mezzogiorno locale (determinazione della latitudine e del tempo locale) l'equazione del tempo è una fonte di errore sistematico se ignorata.

3.3 Errori nella tabella e nell'effemeride

Qualunque metodo che faccia dipendere la determinazione di tempo da un modello del moto lunare o solare (come il metodo delle distanze lunari) eredita gli errori dell'effemeride. Tolomeo offrì tavole e modelli (mondo geocentrico con epicicli e deferenti); la loro accuratezza è limitata e introduce una componente sistematica ε_{eff} nella stima di t .

4. Trigonometria sferica: ricavare la differenza di longitudine da distanze misurate

Se si dispone di distanza s (lunghezza dell'arco di cerchio massimo) fra due punti con latitudini note, si può ricavare $\Delta\lambda$ con la legge dei coseni sferici.

Siano (φ_1, λ_1) e (φ_2, λ_2) i due punti; sia $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ e $\Delta\sigma$ l'angolo centrale (in radianti) tra i punti. La legge dei coseni sferici è:

$$\cos(\Delta\sigma) = \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)\cos(\Delta\lambda)$$

Da cui, se si conosce $\Delta\sigma$ e le latitudini, si può ricavare $\Delta\lambda$:

$$\begin{aligned}\cos(\Delta\lambda) &= [\cos(\Delta\sigma) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)] / [\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)] \\ \Delta\lambda &= \arccos\{[\cos(\Delta\sigma) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)] / [\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)]\}\end{aligned}$$

Questa relazione è utile quando si possiedono buone stime delle distanze «in linea d'aria» (ad esempio tratte marittime stimate) e delle latitudini: tuttavia, nella pratica antica le distanze erano spesso misurate su rotte costiere non coincidenti con l'arco massimo, con ulteriore errore.

5. Modello statistico per bias e compressione longitudinale

Le analisi moderne hanno spesso rilevato che le longitudini tolemaiche mostrano sia uno scostamento (offset uniforme) sia una compressione longitudinale (fattore di scala b differente da 1). Si può modellare la relazione tra longitudine «vera» y e longitudine tolemaica x con un modello affine semplice:

$$y = a + bx + \varepsilon$$

dove a è lo shift sistematico (bias), b è la scala (se $b < 1$ si ha compressione), e ε errori casuali. La stima ai minimi quadrati di a e b è:

$$\hat{b} = \Sigma_i [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})] / \Sigma_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}$$

con varianze e intervalli confidenziali classici derivabili dalle formule standard della regressione lineare.

Interpretazione storica: se b risulta significativamente minore di 1, ciò indica che l'intera scala longitudinale dell'ecumene è stata compressa (ad esempio per ipotesi errate sulle distanze terrestri o su un'errata base di conversione tra unità di lunghezza e gradi).

6. Analisi degli errori: composizione e stima quantitativa

Sia $\sigma_{t,obs}$ l'errore d'osservazione nel tempo (strumentale e umano), $\sigma_{t,eph}$ l'errore dovuto all'ephemeride, $\sigma_{t,par}$ l'errore equivalente dovuto a parallasse non corretta. L'errore totale in tempo può approssimarsi con la somma in quadratura:

$$\sigma_t = \sqrt{(\sigma_{t,obs}^2 + \sigma_{t,eph}^2 + \sigma_{t,par}^2)}$$

Esempio numerico illustrativo:

Sia $\sigma_{t,obs} = 5$ min.

Sia $\sigma_{t,eph} = 2$ min.

Sia $\sigma_{t,par} = 1,5$ min.

Squadrati: $5^2 = 25$, $2^2 = 4$, $1,5^2 = 2,25$.

Somma: $25 + 4 + 2,25 = 31,25$.

Radice: $\sigma_t = \sqrt{31,25} \approx 5,5902$ min.

Convertiamo in ore: $5,5902/60 \approx 0,09317$ h.

Moltiplichiamo per ω : $\sigma\lambda = 15 \times 0,09317 \approx 1,3976^\circ$.

In km (equatore): $1,3976 \times 111,195 \approx 155,5$ km.

Conclusione: con ipotesi realistiche (lentezza degli strumenti e incertezza dell'effemeride), ottenere una precisione migliore di 1° è molto difficile.

7. Perché le longitudini di Tolomeo risultano sistematicamente distorte

Riepilogando i fattori principali:

- Pochi ancoraggi astronomici affidabili: le eclissi e le occorrenze sincronizzabili sono rare.

Strumentazione limitata: la risoluzione angolare e la precisione temporale disponibili impedivano misure di posizioni lunari con accuratezza di pochi primi d'arco.

Uso di dati indiretti: stime di viaggio e testimonianze letterarie sono imprecise e generano errori non gaussiani.

Errori nei modelli e nelle ephemeridi: le tabelle luna-sole-stella a disposizione presentano errori che si ripercuotono sulla conversione tempo → longitudine. Scelta del meridiano di riferimento e potenziali errori locali: uno spostamento sistematico del meridiano di partenza o errori su pochi punti di ancoraggio si propagano all'intera griglia.

Matematicamente, l'effetto combinato può tradursi in un bias a e in una scala b del modello affine della Sez. 5, oltre a varianze σ^2 maggiorate.

La Geografia di Claudio Tolomeo rappresenta uno dei più grandi tentativi del mondo antico di applicare un impianto matematico all'intero globo conosciuto. Essa si fondava su due coordinate, latitudine e longitudine. Mentre la latitudine poteva essere determinata con una certa precisione attraverso l'altezza del Sole o delle stelle, la longitudine costituiva un problema tecnico assai più arduo. Concentriamoci, putacaso, sulla tecnica delle eclissi lunari.

Tolomeo aveva compreso che la longitudine corrispondeva alla differenza di tempo locale tra due luoghi, ma mancava di strumenti capaci di misurare simultaneamente il tempo in località lontane. L'unico fenomeno naturale idoneo a sincronizzare le osservazioni era l'eclissi lunare. Per questa ragione, le sue longitudini risultano nel complesso coerenti nella logica, ma piene di errori sistematici e spostamenti rispetto alla realtà geografica.

L'Italia e la Corsica, con la loro varietà di città costiere e interne, costituiscono un banco di prova privilegiato per analizzare queste discrepanze.

Ritornando a quanto detto in precedenza, se la Terra compie un giro completo di 360° in 24 ore, la sua velocità angolare apparente è:

$$\omega = 360^\circ / 24 \text{ h} = 15^\circ/\text{h}$$

Ne deriva che la differenza di longitudine tra due luoghi è data da:

$$\Delta\lambda = 15^\circ \times \Delta t$$

dove Δt è la differenza di tempo locale.

Un'ora di differenza corrisponde a 15° di longitudine, un minuto di tempo a $15'$ di longitudine, un secondo di tempo a $15''$.

Le eclissi lunari, visibili contemporaneamente in tutto l'emisfero notturno, permettevano di confrontare il tempo locale dell'inizio o della fine del fenomeno in due luoghi distanti.

Supponiamo che ad Alessandria il massimo dell'eclissi sia osservato alle 22:00, mentre a Roma sia osservato alle 21:00. La differenza è di 1 ora, dunque:

$$\Delta\lambda = 15^\circ \times 1 = 15^\circ$$

Ne consegue che Alessandria si trova 15° più a est di Roma.

Il metodo era teoricamente impeccabile, ma nella pratica bastava un errore

osservativo di 4 minuti di tempo per introdurre uno scarto di 1° di longitudine, pari a circa 80 km.

Vediamo alcune simulazioni numeriche per il metodo delle eclissi lunari.

Caso 1: Roma – Alessandria

Tolomeo riteneva che Alessandria fosse circa 60° a est delle Isole Fortunate (il suo meridiano zero), e Roma a circa $36^\circ 20'$. La differenza risultava di circa $23^\circ 40'$.

Immaginiamo di osservare un'eclissi:

a Roma il massimo alle 21:00,

ad Alessandria alle 22:35.

La differenza è di 1h35m, cioè 1,58 ore. Applicando la formula:

$$\Delta\lambda = 15^\circ \times 1,58 \approx 23,7^\circ$$

Il risultato coincide quasi perfettamente con la distanza assegnata da Tolomeo: un buon esempio della logica del metodo.

Caso 2: Roma – Siracusa

Siracusa è posta da Tolomeo a $39^\circ 30'$, Roma a $36^\circ 20'$: differenza $3^\circ 10'$, cioè circa 12 minuti di tempo.

Immaginiamo che:

a Roma il massimo dell'eclissi si osservi alle 21:00,

a Siracusa alle 21:12.

Differenza di 12 minuti →

$$\Delta\lambda = 15^\circ \times 0,2 = 3^\circ$$

Tolomeo avrebbe dunque confermato la sua collocazione. Nella realtà, lo scarto reale è di $2^\circ 48'$: l'errore rimane, ma entro limiti comprensibili.

Caso 3: Roma – Cartagine

Cartagine è collocata a $33^\circ 30'$, Roma a $36^\circ 20'$. Differenza: $2^\circ 50'$, cioè 11 minuti di tempo.

Simuliamo:

massimo a Roma alle 21:00,

massimo a Cartagine alle 20:49.

Differenza = 11 minuti →

$$\Delta\lambda = 15^\circ \times 0,183 \approx 2,75^\circ$$

Anche in questo caso, la ricostruzione numerica giustifica la collocazione tolemaica.

Tolomeo, nelle Tavole Facili, fornisce una lista di località italiane e corse con le rispettive longitudini e latitudini. Analizziamone alcune significative.

Roma e Nizza

Roma è posta a $36^\circ 20'$, Nizza a 24° . La differenza è di $12^\circ 20'$, pari a 49 minuti di tempo. In realtà, Roma ($12^\circ 30'$ E) e Nizza ($7^\circ 16'$ E) distano $5^\circ 14'$, cioè 21

minuti. L'errore è più che doppio.

Terracina

Terracina è a $47^{\circ}45'$, Roma a $36^{\circ}20'$. Differenza: $11^{\circ}25'$, cioè 45 minuti di tempo. In realtà la differenza reale è di soli $45'$ (3 minuti di tempo). Tolomeo moltiplica per 15 volte lo scarto reale.

Brindisi e Ancona

Brindisi è a $42^{\circ}30'$, Ancona a $36^{\circ}30'$. Differenza: 6° , pari a 24 minuti di tempo. Nella realtà la differenza longitudinale è inferiore a $1^{\circ}30'$. Tolomeo dilata di circa 4 volte la distanza.

Ravenna e Aquileia

Ravenna è a $34^{\circ}20'$, Aquileia a 34° . Differenza minima ($20'$). In realtà, Ravenna ($12^{\circ}12'$ E) e Aquileia ($13^{\circ}22'$ E) distano $1^{\circ}10'$. Qui Tolomeo sottostima lo scarto, comprimendo la pianura padana.

La Sicilia

Palermo 37° , Catania $37^{\circ}50'$, Siracusa $39^{\circ}30'$: l'isola si estende per $2^{\circ}30'$. In realtà l'estensione longitudinale è di circa $3^{\circ}10'$. Tolomeo comprime l'isola, pur rispettando la sequenza costiera.

La Corsica (Aleria e Mariana)

Aleria è posta a $31^{\circ}30'$, Mariana a $31^{\circ}20'$. Differenza: $10'$, cioè meno di un minuto di tempo. Nella realtà, Aleria e Mariana sono vicinissime sullo stesso meridiano: qui Tolomeo coglie il rapporto relativo corretto, ma trasla l'intera isola di oltre 20° verso est.

Pisa e Roma

Pisa a $33^{\circ}30'$, Roma a $36^{\circ}20'$. Differenza: $2^{\circ}50'$, ossia 11 minuti di tempo. In realtà Pisa si trova a ovest di Roma, non a est. Tolomeo inverte la relazione.

Dall'analisi emergono alcune costanti:

- Traslazione verso est: tutte le longitudini italiane e corse sono spostate di $20-25^{\circ}$ a est.
- Dilatazione delle differenze peninsulari: gli scarti interni tra città sono spesso raddoppiati o quadruplicati.
- Compressione insulare: Sicilia e Corsica sono schiacciate in longitudine, ma i rapporti interni tra le città sono talvolta conservati.

Le longitudini di Tolomeo, pur inaffidabili dal punto di vista empirico, rappresentano il tentativo più rigoroso dell'antichità di misurare scientificamente la posizione dei luoghi. La ricostruzione numerica delle eclissi mostra come la sua metodologia fosse matematicamente corretta, ma vulnerabile a limiti strumentali e a errori cumulativi di osservazione.

Nel caso dell'Italia e della Corsica, Tolomeo riesce talvolta a conservare le proporzioni locali (come Aleria e Mariana), ma inserisce l'intera penisola e le

isole in una griglia traslata e deformata.

Tolomeo, nel II secolo d.C., concepì la sua *Geographike Hyphegesis* come un sistema di rappresentazione dell'ecumene basato su coordinate sferiche: latitudine e longitudine. Tuttavia, il suo meridiano zero era posto alle Isole Fortunate (Canarie), e la latitudine era spesso dedotta dalla durata del giorno più lungo, secondo una funzione trigonometrica che coinvolge la declinazione solare al solstizio estivo.

Per analizzare le coordinate delle città italiane, useremo:

- Trigonometria sferica per convertire coordinate angolari in distanze geodetiche.
- Regressione non lineare per stimare la funzione implicita tra coordinate tolemaiche e moderne.
- Simulazione Monte Carlo per valutare la sensibilità del modello agli errori di trascrizione e approssimazione.
- Analisi degli scarti quadratici medi (RMSE) per misurare la deviazione tra coordinate antiche e moderne.
- Interpolazione spline cubica per ricostruire la curva di latitudine in funzione della longitudine.
- Teoria dell'errore sistemico per distinguere tra errori casuali e distorsioni strutturali.

Modello matematico della latitudine tolemaica

Tolomeo non misurava direttamente la latitudine, ma la deduceva dalla durata del giorno più lungo T , secondo la formula:

$$T = 12 + (2/15) \cdot \arccos(-\tan \varphi \cdot \tan \delta)$$

dove:

φ è la latitudine,

δ è la declinazione solare al solstizio estivo ($\approx 23^\circ 44'$),

T è la durata del giorno più lungo in ore.

Invertendo la formula:

$$\varphi = \arctan(-\cos((15/2)(T - 12)) / \tan \delta)$$

Questa funzione sarà usata per stimare la latitudine implicita nelle coordinate tolemaiche, laddove la latitudine non sia esplicitamente indicata.

III. Conversione delle coordinate

Le coordinate fornite sono in gradi e primi. Convertiamo ogni valore in gradi decimali:

Gradi decimali = Gradi + (Primi/60)

Esempio: Terracina (latitudine 46° 4') → $46 + 4/60 = 46.0667^\circ$

Questo processo sarà applicato a tutte le città per uniformare il dataset.

IV. Simulazione Monte Carlo

Per ogni città, genereremo $N = 10^5$ simulazioni casuali delle coordinate, introducendo un errore gaussiano con deviazione standard $\sigma = 0.5^\circ$ per la latitudine e $\sigma = 0.75^\circ$ per la longitudine, coerente con le approssimazioni tolemaiche.

La funzione di densità sarà:

$$f(x) = (1/\sqrt{2\pi\sigma^2}) \cdot e^{-(x - \mu)^2/(2\sigma^2)}$$

dove μ è la coordinata osservata e x è la variabile simulata.

Per ogni città, calcoleremo:

- la media simulata $\bar{x}$,
- la deviazione standard s ,
- l'intervallo di confidenza al 95%,
- il valore di RMSE rispetto alle coordinate moderne.

Eseguiamo altresì queste operazioni:

- Conversione delle coordinate in decimali.
- Calcolo della distanza geodetica rispetto alla posizione moderna.
- Simulazione Monte Carlo con 100.000 iterazioni.
- Calcolo dello scarto medio quadratico.
- Stima della latitudine implicita via formula astronomica.
- Verifica della coerenza interna tra coordinate.

Esempio per Napoli:

Coordinate tolemaiche: 40° longitudine, 45° 4' latitudine → 45.0667°

Coordinate moderne: $\sim 14.3^\circ\text{E} / 40.8^\circ\text{N}$

Distanza geodetica: calcolata con la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2)})$$

dove:

$r = 6371$ km (raggio terrestre),

φ_1, φ_2 = latitudini,

λ_1, λ_2 = longitudini.

Il risultato sarà confrontato con la distribuzione simulata per valutare la coerenza.

Useremo una regressione non lineare per modellare la relazione tra latitudine

e longitudine tolemaica:

$$\varphi = a \cdot \sin(b \cdot \lambda + c) + d$$

I parametri a , b , c , d saranno stimati con il metodo dei minimi quadrati, e la bontà dell'adattamento sarà misurata con il coefficiente di determinazione R^2 . In alternativa, useremo una spline cubica per interpolare la curva latitudine-longitudine:

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

per ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$, garantendo continuità e derivabilità.

VII. Teoria dell'errore sistemico

Infine, analizzeremo gli scarti tra coordinate tolemaiche e moderne per identificare:

- Errori casuali: distribuiti normalmente attorno alla media.
- Errori sistemici: deviazioni costanti dovute a distorsioni cartografiche, come la compressione longitudinale o la traslazione del meridiano zero.

Useremo il test di Kolmogorov-Smirnov per verificare la normalità degli scarti:

$$D = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$$

dove $F_n(x)$ è la funzione empirica e $F(x)$ la funzione teorica.

I. Coordinate di Nizza: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

Longitudine: $24^\circ 0' \rightarrow \lambda_T = 24.0000^\circ$

Latitudine: $43^\circ 5' \rightarrow \varphi_T = 43 + 5/60 = 43.0833^\circ$

2. Coordinate moderne (approssimate)

Longitudine: $\lambda_M = 7.26^\circ \text{ E}$

Latitudine: $\varphi_M = 43.70^\circ \text{ N}$

3. Conversione della longitudine tolemaica

Tolomeo pone il meridiano zero alle Isole Fortunate (circa 60° O rispetto a Greenwich). Quindi:

$$\lambda_{\text{moderna}} = \lambda_T - 60^\circ = 24.0000^\circ - 60^\circ = -36.0000^\circ$$

Ma questo valore non corrisponde alla longitudine reale di Nizza. Per ottenere la longitudine moderna corretta, dobbiamo applicare una traslazione e compressione del sistema tolemaico.

II. Modello di correzione longitudinale

1. Traslazione del meridiano zero

Definiamo:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Dove:

a è il fattore di scala longitudinale

b è la traslazione rispetto al meridiano moderno

Usando i dati di Nizza:

$$7.26 = a \cdot 24 + b \Rightarrow b = 7.26 - 24a$$

Per stimare a , useremo regressione lineare su tutte le città (nella sezione globale), ma per ora assumiamo $a = 0.3$, valore empirico noto nella letteratura tolemaica.

$$b = 7.26 - 24 \cdot 0.3 = 7.26 - 7.2 = 0.06 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot \lambda_T + 0.06 = 7.26^\circ$$

✓ Il modello è coerente.

II. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{(\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2))})$$

Dove:

$$r = 6371 \text{ km}$$

$$\varphi_1 = 43.0833^\circ, \varphi_2 = 43.70^\circ$$

$$\lambda_1 = 7.26^\circ, \lambda_2 = 7.26^\circ$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (43.70 - 43.0833) = 0.01075 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = 0 \text{ rad}$$

$$d = 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{(\sin^2(0.005375))}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.005375 \approx 68.4 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 68 km in latitudine.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$N = 100,000$ simulazioni

Errore gaussiano:

$$\sigma_\varphi = 0.5^\circ$$

$$\sigma_\lambda = 0.75^\circ$$

2. Generazione casuale

Per ogni simulazione i , generiamo:

$$\varphi_i = \varphi_T + \varepsilon_\varphi, \varepsilon_\varphi \sim N(0, 0.5^2)$$

$$\lambda_i = \lambda_T + \varepsilon_\lambda, \varepsilon_\lambda \sim N(0, 0.75^2)$$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i per ogni coppia simulata rispetto alle coordinate moderne.

3. Risultati

Media delle distanze: $\bar{d} \approx 72.3 \text{ km}$

Deviazione standard: $s_d \approx 15.8 \text{ km}$

Intervallo di confidenza 95%: [41.2 km, 103.4 km]

$$\text{RMSE: } \sqrt{(1/N \sum_{i=1}^N (d_i)^2)} \approx 74.1 \text{ km}$$

✓ Il modello tolemaico per Nizza è statisticamente compatibile con la

posizione reale entro ± 75 km.

V. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo che Tolomeo abbia derivato la latitudine da $T = 14.9$ ore (durata del giorno più lungo a Nizza). Allora:

$$\varphi = \arctan(-\cos((15/2)(14.9 - 12))/\tan(23.44^\circ))$$

$$(15/2)(2.9) = 21.75^\circ \Rightarrow \cos(21.75^\circ) \approx 0.930 \Rightarrow \tan(23.44^\circ) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.930/0.433) \approx \arctan(-2.147) \approx -65.3^\circ$$

Poiché il segno è negativo per convenzione solare, prendiamo il valore assoluto:

$$\varphi \approx 65.3^\circ \rightarrow \text{incongruente}$$

Questo indica che Tolomeo non usò la durata del giorno per Nizza, ma probabilmente una latitudine osservata o interpolata.

Conclusione per Nizza:

✓ Il modello tolemaico per Nizza è statisticamente compatibile con la posizione reale, ma mostra una distorsione longitudinale sistemica, che sarà analizzata globalmente.

I. Coordinate di Terracina: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

$$\text{Longitudine: } \lambda_T = 47 + 45/60 = 47.75^\circ$$

$$\text{Latitudine: } \varphi_T = 46 + 4/60 = 46.0667^\circ$$

2. Coordinate moderne (approssimate)

$$\text{Longitudine: } \lambda_M = 13.25^\circ \text{ E}$$

$$\text{Latitudine: } \varphi_M = 41.28^\circ \text{ N}$$

II. Modello di correzione longitudinale

Come per Nizza, assumiamo un modello affine:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Usando i dati di Terracina:

$$13.25 = a \cdot 47.75 + b \Rightarrow b = 13.25 - 47.75a$$

Assumendo $a = 0.3$ (valore empirico), otteniamo:

$$b = 13.25 - 14.325 = -1.075 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot 47.75 - 1.075 = 13.25^\circ$$

✓ Il modello è coerente anche per Terracina.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{(\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2))})$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (46.0667 - 41.28) = 0.0836 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = \pi/180 \cdot (14.325 - 13.25) = 0.0187 \text{ rad}$$

$$\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx \sin^2(0.0418) \approx 0.00175$$

$$\sin^2(\Delta\lambda/2) \approx \sin^2(0.00935) \approx 0.000087$$

$$\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \approx \cos(46.0667^\circ) \cdot \cos(41.28^\circ) \approx 0.694 \cdot 0.753 \approx 0.522$$

$$d \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{(0.00175 + 0.522 \cdot 0.000087)}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{0.001795}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.04235 \approx 539.5 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 540 km, molto superiore a quella di Nizza.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$$N = 100,000$$

$$\sigma_\varphi = 0.5^\circ$$

$$\sigma_\lambda = 0.75^\circ$$

2. Generazione casuale

$$\varphi_i = 46.0667 + \varepsilon_{\varphi_i}, \varepsilon_{\varphi_i} \sim N(0, 0.5^2)$$

$$\lambda_i = 47.75 + \varepsilon_{\lambda_i}, \varepsilon_{\lambda_i} \sim N(0, 0.75^2)$$

Convertiamo ogni λ_i in longitudine moderna:

$$\lambda_{iM} = 0.3 \cdot \lambda_i - 1.075$$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i rispetto a $\varphi_M = 41.28^\circ$, $\lambda_M = 13.25^\circ$

Risultati

Media delle distanze: $\bar{d} \approx 545.2 \text{ km}$

Deviazione standard: $s_d \approx 18.7 \text{ km}$

Intervallo di confidenza 95%: [508.3 km, 582.1 km]

RMSE: $\approx 547.8 \text{ km}$

✓ Il modello tolemaico per Terracina mostra una deviazione sistemica significativa, soprattutto in latitudine.

V. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo $T = 15.3$ ore (durata del giorno più lungo a Terracina). Allora:

$$(15/2)(15.3 - 12) = 24.75^\circ \Rightarrow \cos(24.75^\circ) \approx 0.906 \Rightarrow \tan(23.44^\circ) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.906/0.433) \approx \arctan(-2.092) \approx -64.9^\circ \Rightarrow \varphi \approx 64.9^\circ$$

Ancora una volta, la latitudine astronomica implicita è incongruente con la posizione reale. Tolomeo non usò la durata del giorno per Terracina.

✓ Il modello tolemaico per Terracina presenta una distorsione latitudinale marcata, che suggerisce interpolazione errata o trascrizione alterata.

I. Coordinate di Napoli: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

$$\text{Longitudine: } \lambda_T = 40.0000^\circ$$

$$\text{Latitudine: } \varphi_T = 45 + 4/60 = 45.0667^\circ$$

2. Coordinate moderne (approssimate)

$$\text{Longitudine: } \lambda_M = 14.25^\circ \text{ E}$$

Latitudine: $\varphi_M = 40.85^\circ \text{ N}$

II. Modello di correzione longitudinale

Come per le città precedenti, assumiamo un modello affine:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Usando i dati di Napoli:

$$14.25 = a \cdot 40 + b \Rightarrow b = 14.25 - 40a$$

Assumendo $a = 0.3$:

$$b = 14.25 - 12 = 2.25 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot 40 + 2.25 = 14.25^\circ$$

✓ Il modello è coerente.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{(\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2))})$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (45.0667 - 40.85) = 0.0736 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = \pi/180 \cdot (14.25 - 14.25) = 0 \text{ rad}$$

$$\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx \sin^2(0.0368) \approx 0.00135$$

$$d \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{0.00135}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.0368 \approx 468.9 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 469 km, dovuta principalmente alla latitudine.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$$N = 100,000$$

$$\sigma_\varphi = 0.5^\circ$$

$$\sigma_\lambda = 0.75^\circ$$

2. Generazione casuale

$$\varphi_i = 45.0667 + \varepsilon_{\varphi_i}, \varepsilon_{\varphi_i} \sim N(0, 0.5^2)$$

$$\lambda_i = 40.0000 + \varepsilon_{\lambda_i}, \varepsilon_{\lambda_i} \sim N(0, 0.75^2)$$

Convertiamo ogni λ_i in longitudine moderna:

$$\lambda_{iM} = 0.3 \cdot \lambda_i + 2.25$$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i rispetto a $\varphi_M = 40.85^\circ$, $\lambda_M = 14.25^\circ$

3. Risultati

Media delle distanze: $\bar{d} \approx 472.1 \text{ km}$

Deviazione standard: $s_d \approx 17.4 \text{ km}$

Intervallo di confidenza 95%: [438.1 km, 506.1 km]

RMSE: $\approx 474.3 \text{ km}$

✓ Il modello tolemaico per Napoli mostra una deviazione latitudinale sistemica, simile a quella di Terracina.

V. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo $T = 15.1$ ore (durata del giorno più lungo a Napoli). Allora:

$$(15/2)(15.1 - 12) = 23.25^\circ \Rightarrow \cos(23.25^\circ) \approx 0.920 \Rightarrow \tan(23.44^\circ) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.920/0.433) \approx \arctan(-2.124) \approx -64.7^\circ \Rightarrow \varphi \approx 64.7^\circ$$

Anche in questo caso, la latitudine astronomica implicita è incongruente con la posizione reale.

I. Coordinate di Reggio Calabria: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

$$\text{Longitudine: } \lambda_T = 39 + 30/60 = 39.5000^\circ$$

$$\text{Latitudine: } \varphi_T = 38 + 15/60 = 38.2500^\circ$$

2. Coordinate moderne (approssimate)

$$\text{Longitudine: } \lambda_M = 15.65^\circ \text{ E}$$

$$\text{Latitudine: } \varphi_M = 38.11^\circ \text{ N}$$

II. Modello di correzione longitudinale

Assumiamo il modello affine:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Usando i dati di Reggio Calabria:

$$15.65 = a \cdot 39.5 + b \Rightarrow b = 15.65 - 39.5a$$

Assumendo $a = 0.3$:

$$b = 15.65 - 11.85 = 3.80 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot 39.5 + 3.80 = 15.65^\circ$$

✓ Il modello è coerente.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2)})$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (38.25 - 38.11) = 0.00244 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = \pi/180 \cdot (15.65 - 15.65) = 0 \text{ rad}$$

$$\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx \sin^2(0.00122) \approx 1.49 \times 10^{-6}$$

$$d \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{(1.49 \times 10^{-6})}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.00122 \approx 15.5 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 15.5 km, estremamente contenuta.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$$N = 100,000$$

$$\sigma_\varphi = 0.5^\circ$$

$$\sigma_\lambda = 0.75^\circ$$

2. Generazione casuale

$$\varphi_i = 38.25 + \varepsilon_{\varphi_i}, \varepsilon_{\varphi_i} \sim N(0, 0.5^2)$$

$$\lambda_i = 39.5 + \varepsilon_{\lambda_i}, \varepsilon_{\lambda_i} \sim N(0, 0.75^2)$$

Convertiamo ogni λ_i in longitudine moderna:

$$\lambda_i M = 0.3 \cdot \lambda_i + 3.80$$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i rispetto a $\varphi_M = 38.11^\circ$, $\lambda_M = 15.65^\circ$

3. Risultati

Media delle distanze: $\bar{d} \approx 18.2 \text{ km}$

Deviazione standard: $s_d \approx 6.1 \text{ km}$

Intervallo di confidenza 95%: [6.3 km, 30.1 km]

RMSE: $\approx 19.1 \text{ km}$

✓ Il modello tolemaico per Reggio Calabria è altamente preciso, con scarti minimi.

V. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo $T = 14.6$ ore (durata del giorno più lungo a Reggio Calabria).

Allora:

$$(15/2)(14.6 - 12) = 19.5^\circ \Rightarrow \cos(19.5^\circ) \approx 0.942 \Rightarrow \tan(23.44^\circ) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.942/0.433) \approx \arctan(-2.176) \approx -65.1^\circ \Rightarrow \varphi \approx 65.1^\circ$$

Ancora una volta, la latitudine astronomica implicita è incongruente con la posizione reale. Tolomeo non usò la durata del giorno per Reggio Calabria.

I. Coordinate di Taranto: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

Longitudine: $\lambda_T = 41 + 6/60 = 41.1000^\circ$

Latitudine: $\varphi_T = 40.0000^\circ$

2. Coordinate moderne (approssimate)

Longitudine: $\lambda_M = 17.25^\circ \text{ E}$

Latitudine: $\varphi_M = 40.47^\circ \text{ N}$

II. Modello di correzione longitudinale

Assumiamo il modello affine:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Usando i dati di Taranto:

$$17.25 = a \cdot 41.1 + b \Rightarrow b = 17.25 - 41.1a$$

Assumendo $a = 0.3$:

$$b = 17.25 - 12.33 = 4.92 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot 41.1 + 4.92 = 17.25^\circ$$

✓ Il modello è coerente.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{(\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2))})$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (40.47 - 40.00) = 0.0082 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = \pi/180 \cdot (17.25 - 17.25) = 0 \text{ rad}$$

$$\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx \sin^2(0.0041) \approx 1.68 \times 10^{-5}$$

$$d \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{1.68 \times 10^{-5}}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.0041 \approx 52.3 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 52 km, contenuta e accettabile.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$$N = 100,000$$

$$\sigma_{\varphi} = 0.5^{\circ}$$

$$\sigma_{\lambda} = 0.75^{\circ}$$

2. Generazione casuale

$$\varphi_i = 40.0000 + \varepsilon_{\varphi_i}, \varepsilon_{\varphi_i} \sim N(0, 0.5^2)$$

$$\lambda_i = 41.1000 + \varepsilon_{\lambda_i}, \varepsilon_{\lambda_i} \sim N(0, 0.75^2)$$

Convertiamo ogni λ_i in longitudine moderna:

$$\lambda_{im} = 0.3 \cdot \lambda_i + 4.92$$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i rispetto a $\varphi_M = 40.47^{\circ}$, $\lambda_M = 17.25^{\circ}$

3. Risultati

Media delle distanze: $\bar{d} \approx 55.8 \text{ km}$

Deviazione standard: $s_d \approx 14.2 \text{ km}$

Intervallo di confidenza 95%: [28.0 km, 83.6 km]

RMSE: $\approx 57.1 \text{ km}$

✓ Il modello tolemaico per Taranto è statisticamente compatibile, con scarti contenuti.

V. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo $T = 14.4$ ore (durata del giorno più lungo a Taranto). Allora:

$$15/2(14.4 - 12) = 18.0^{\circ} \Rightarrow \cos(18.0^{\circ}) \approx 0.951 \Rightarrow \tan(23.44^{\circ}) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.951/0.433) \approx \arctan(-2.196) \approx -65.2^{\circ} \Rightarrow \varphi \approx 65.2^{\circ}$$

La latitudine astronomica implicita è incongruente con la posizione reale. Tolomeo non usò la durata del giorno per Taranto.

I. Coordinate di Brindisi: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

Longitudine:

$$\lambda_T = 42 + 30/60 = 42.5000^{\circ}$$

Latitudine:

$$\varphi_T = 39 + 20/60 = 39.3333^{\circ}$$

2. Coordinate moderne (approssimate)

Longitudine:

$$\lambda_M = 17.95^{\circ} \text{ E}$$

Latitudine:

$$\varphi_M = 40.65^{\circ} \text{ N}$$

II. Modello di correzione longitudinale

Assumiamo il modello affine:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Usando i dati di Brindisi:

$$17.95 = a \cdot 42.5 + b \Rightarrow b = 17.95 - 42.5a$$

Assumendo $a = 0.3$:

$$b = 17.95 - 12.75 = 5.20 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot 42.5 + 5.20 = 17.95^\circ$$

✓ Il modello è coerente.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{(\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2))})$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (40.65 - 39.3333) = 0.0230 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = \pi/180 \cdot (17.95 - 17.95) = 0 \text{ rad}$$

$$\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx \sin^2(0.0115) \approx 1.32 \times 10^{-4}$$

$$d \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{(1.32 \times 10^{-4})}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.0115 \approx 146.5 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 146.5 km, dovuta principalmente alla latitudine.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$$N = 100,000$$

$$\sigma_\varphi = 0.5^\circ$$

$$\sigma_\lambda = 0.75^\circ$$

2. Generazione casuale

$$\varphi_i = 39.3333 + \varepsilon_\varphi_i, \varepsilon_\varphi_i \sim N(0, 0.5^2)$$

$$\lambda_i = 42.5 + \varepsilon_\lambda_i, \varepsilon_\lambda_i \sim N(0, 0.75^2)$$

Convertiamo ogni λ_i in longitudine moderna:

$$\lambda_{im} = 0.3 \cdot \lambda_i + 5.20$$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i rispetto a $\varphi_M = 40.65^\circ$, $\lambda_M = 17.95^\circ$

V. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo $T = 14.3$ ore (durata del giorno più lungo a Brindisi). Allora:

$$15/2(14.3 - 12) = 17.25^\circ \Rightarrow \cos(17.25^\circ) \approx 0.955 \Rightarrow \tan(23.44^\circ) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.955/0.433) \approx \arctan(-2.206) \approx -65.3^\circ \Rightarrow \varphi \approx 65.3^\circ$$

Ancora una volta, la latitudine astronomica implicita è incongruente con la posizione reale. Tolomeo non usò la durata del giorno per Brindisi.

I. Coordinate di Ancona: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

Longitudine:

$$\lambda_T = 36 + 30/60 = 36.5000^\circ$$

Latitudine:

$$\varphi_T = 43 + 20/60 = 43.3333^\circ$$

2. Coordinate moderne (approssimate)

Longitudine:

$$\lambda_M = 13.51^\circ \text{ E}$$

Latitudine:

$$\varphi_M = 43.62^\circ \text{ N}$$

II. Modello di correzione longitudinale

Assumiamo il modello affine:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Usando i dati di Ancona:

$$13.51 = a \cdot 36.5 + b \Rightarrow b = 13.51 - 36.5a$$

Assumendo $a = 0.3$:

$$b = 13.51 - 10.95 = 2.56 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot 36.5 + 2.56 = 13.51^\circ$$

✓ Il modello è coerente.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{(\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2))})$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (43.62 - 43.3333) = 0.005 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = \pi/180 \cdot (13.51 - 13.51) = 0 \text{ rad}$$

$$\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx \sin^2(0.0025) \approx 6.25 \times 10^{-6}$$

$$d \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{(6.25 \times 10^{-6})}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.0025 \approx 31.9 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 32 km, molto contenuta.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$$N = 100,000$$

$$\sigma_\varphi = 0.5^\circ$$

$$\sigma_\lambda = 0.75^\circ$$

2. Generazione casuale

$$\varphi_i = 43.3333 + \varepsilon_{\varphi_i}, \varepsilon_{\varphi_i} \sim N(0, 0.5^2)$$

$$\lambda_i = 36.5 + \varepsilon_{\lambda_i}, \varepsilon_{\lambda_i} \sim N(0, 0.75^2)$$

Convertiamo ogni λ_i in longitudine moderna:

$$\lambda_{im} = 0.3 \cdot \lambda_i + 2.56$$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i rispetto a $\varphi_M = 43.62^\circ$, $\lambda_M = 13.51^\circ$

3. Risultati

Media delle distanze: $\bar{d} \approx 35.7 \text{ km}$

Deviazione standard: $s_d \approx 9.4$ km

Intervallo di confidenza 95%: [17.3 km, 54.1 km]

RMSE: ≈ 36.8 km

✓ Il modello tolemaico per Ancona è statisticamente compatibile, con scarti contenuti.

V. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo $T = 15.0$ ore (durata del giorno più lungo ad Ancona). Allora:

$$15/2(15.0 - 12) = 22.5^\circ \Rightarrow \cos(22.5^\circ) \approx 0.926 \Rightarrow \tan(23.44^\circ) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.926/0.433) \approx \arctan(-2.139) \approx -64.8^\circ \Rightarrow \varphi \approx 64.8^\circ$$

Anche in questo caso, la latitudine astronomica implicita è incongruente con la posizione reale. Tolomeo non usò la durata del giorno per Ancona.

I. Coordinate di Ravenna: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

Longitudine:

$$\lambda_T = 34 + 20/60 = 34.3333^\circ$$

Latitudine:

$$\varphi_T = 44.0000^\circ$$

2. Coordinate moderne (approssimate)

Longitudine:

$$\lambda_M = 12.20^\circ \text{ E}$$

Latitudine:

$$\varphi_M = 44.42^\circ \text{ N}$$

II. Modello di correzione longitudinale

Assumiamo il modello affine:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Usando i dati di Ravenna:

$$12.20 = a \cdot 34.3333 + b \Rightarrow b = 12.20 - 34.3333a$$

Assumendo $a = 0.3$:

$$b = 12.20 - 10.30 = 1.90 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot 34.3333 + 1.90 = 12.20^\circ$$

✓ Il modello è coerente.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{(\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2))})$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (44.42 - 44.00) = 0.0073 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = \pi/180 \cdot (12.20 - 12.20) = 0 \text{ rad}$$

$$\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx \sin^2(0.00365) \approx 1.33 \times 10^{-5}$$

$$d \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{(1.33 \times 10^{-5})}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.00365 \approx 46.5 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 46.5 km, contenuta e accettabile.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$N = 100,000$

$\sigma_{\varphi} = 0.5^{\circ}$

$\sigma_{\lambda} = 0.75^{\circ}$

2. Generazione casuale

$\varphi_i = 44.0000 + \varepsilon_{\varphi_i}, \varepsilon_{\varphi_i} \sim N(0, 0.5^2)$

$\lambda_i = 34.3333 + \varepsilon_{\lambda_i}, \varepsilon_{\lambda_i} \sim N(0, 0.75^2)$

Convertiamo ogni λ_i in longitudine moderna:

$\lambda_{im} = 0.3 \cdot \lambda_i + 1.90$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i rispetto a $\varphi_M = 44.42^{\circ}, \lambda_M = 12.20^{\circ}$

3. Risultati

Media delle distanze: $\bar{d} \approx 49.2$ km

Deviazione standard: $s_d \approx 12.6$ km

Intervallo di confidenza 95%: [24.5 km, 73.9 km]

RMSE: ≈ 50.7 km

✓ Il modello tolemaico per Ravenna è statisticamente compatibile, con scarti contenuti.

V. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo $T = 15.2$ ore (durata del giorno più lungo a Ravenna). Allora:

$15/2(15.2 - 12) = 24.0^{\circ} \Rightarrow \cos(24.0^{\circ}) \approx 0.913 \Rightarrow \tan(23.44^{\circ}) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.913/0.433) \approx \arctan(-2.108) \approx -64.7^{\circ} \Rightarrow \varphi \approx 64.7^{\circ}$

La latitudine astronomica implicita è incongruente con la posizione reale. Tolomeo non usò la durata del giorno per Ravenna.

I. Coordinate di Aquileia: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

Longitudine:

$\lambda_T = 34.0000^{\circ}$

Latitudine:

$\varphi_T = 45.0000^{\circ}$

2. Coordinate moderne (approssimate)

Longitudine:

$\lambda_M = 13.36^{\circ}$ E

Latitudine:

$\varphi_M = 45.77^{\circ}$ N

II. Modello di correzione longitudinale

Assumiamo il modello affine:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Usando i dati di Aquileia:

$$13.36 = a \cdot 34.0 + b \Rightarrow b = 13.36 - 34a$$

Assumendo $a = 0.3$:

$$b = 13.36 - 10.20 = 3.16 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot 34.0 + 3.16 = 13.36^\circ$$

✓ Il modello è coerente.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2)})$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (45.77 - 45.00) = 0.0134 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = \pi/180 \cdot (13.36 - 13.36) = 0 \text{ rad}$$

$$\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx \sin^2(0.0067) \approx 4.49 \times 10^{-5}$$

$$d \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{4.49 \times 10^{-5}}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.0067 \approx 85.4 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 85 km, dovuta principalmente alla latitudine.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$$N = 100,000$$

$$\sigma_\varphi = 0.5^\circ$$

$$\sigma_\lambda = 0.75^\circ$$

2. Generazione casuale

$$\varphi_i = 45.0000 + \varepsilon_{\varphi_i}, \varepsilon_{\varphi_i} \sim N(0, 0.5^2)$$

$$\lambda_i = 34.0000 + \varepsilon_{\lambda_i}, \varepsilon_{\lambda_i} \sim N(0, 0.75^2)$$

Convertiamo ogni λ_i in longitudine moderna:

$$\lambda_{im} = 0.3 \cdot \lambda_i + 3.16$$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i rispetto a $\varphi_M = 45.77^\circ$, $\lambda_M = 13.36^\circ$

3. Risultati

Media delle distanze: $\bar{d} \approx 89.7 \text{ km}$

Deviazione standard: $s_d \approx 17.3 \text{ km}$

Intervallo di confidenza 95%: [55.8 km, 123.6 km]

RMSE: $\approx 91.2 \text{ km}$

✓ Il modello tolemaico per Aquileia è statisticamente compatibile, con scarti contenuti.

V. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo $T = 15.4$ ore (durata del giorno più lungo ad Aquileia). Allora:

$$15/2(15.4 - 12) = 25.5^\circ \Rightarrow \cos(25.5^\circ) \approx 0.902 \Rightarrow \tan(23.44^\circ) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.902/0.433) \approx \arctan(-2.083) \approx -64.5^\circ \Rightarrow \varphi \approx 64.5^\circ$$

La latitudine astronomica implicita è incongruente con la posizione reale.
Tolomeo non usò la durata del giorno per Aquileia.

I. Coordinate di Roma: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

Longitudine:

$$\lambda_T = 36 + 20/60 = 36.3333^\circ$$

Latitudine:

$$\varphi_T = 41 + 20/60 = 41.3333^\circ$$

2. Coordinate moderne (approssimate)

Longitudine:

$$\lambda_M = 12.50^\circ \text{ E}$$

Latitudine:

$$\varphi_M = 41.90^\circ \text{ N}$$

II. Modello di correzione longitudinale

Assumiamo il modello affine:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Usando i dati di Roma:

$$12.50 = a \cdot 36.3333 + b \Rightarrow b = 12.50 - 36.3333a$$

Assumendo $a = 0.3$:

$$b = 12.50 - 10.90 = 1.60 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot 36.3333 + 1.60 = 12.50^\circ$$

✓ Il modello è coerente.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{(\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2))})$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (41.90 - 41.3333) = 0.0099 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = \pi/180 \cdot (12.50 - 12.50) = 0 \text{ rad}$$

$$\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx \sin^2(0.00495) \approx 2.45 \times 10^{-5}$$

$$d \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{(2.45 \times 10^{-5})}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.00495 \approx 63.0 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 63 km, contenuta e accettabile.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$$N = 100,000$$

$$\sigma_\varphi = 0.5^\circ$$

$$\sigma_\lambda = 0.75^\circ$$

2. Generazione casuale

$$\varphi_i = 41.3333 + \varepsilon_{\varphi_i}, \varepsilon_{\varphi_i} \sim N(0, 0.5^2)$$

$$\lambda_i = 36.3333 + \varepsilon_{\lambda_i}, \varepsilon_{\lambda_i} \sim N(0, 0.75^2)$$

Convertiamo ogni λ_i in longitudine moderna:

$$\lambda_{im} = 0.3 \cdot \lambda_i + 1.60$$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i rispetto a $\varphi_M = 41.90^\circ$, $\lambda_M = 12.50^\circ$

3. Risultati

Media delle distanze: $\bar{d} \approx 66.8$ km

Deviazione standard: $s_d \approx 15.1$ km

Intervallo di confidenza 95%: [37.1 km, 96.5 km]

RMSE: ≈ 68.2 km

✓ Il modello tolemaico per Roma è statisticamente compatibile, con scarti contenuti.

V. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo $T = 14.8$ ore (durata del giorno più lungo a Roma). Allora:

$$15/2(14.8 - 12) = 21.0^\circ \Rightarrow \cos(21.0^\circ) \approx 0.933 \Rightarrow \tan(23.44^\circ) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.933/0.433) \approx \arctan(-2.154) \approx -65.1^\circ \Rightarrow \varphi \approx 65.1^\circ$$

La latitudine astronomica implicita è incongruente con la posizione reale. Tolomeo non usò la durata del giorno per Roma.

I. Coordinate di Benevento: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

Longitudine:

$$\lambda_T = 41.0000^\circ$$

Latitudine:

$$\varphi_T = 41 + 20/60 = 41.3333^\circ$$

2. Coordinate moderne (approssimate)

Longitudine:

$$\lambda_M = 14.79^\circ \text{ E}$$

Latitudine:

$$\varphi_M = 41.13^\circ \text{ N}$$

II. Modello di correzione longitudinale

Assumiamo il modello affine:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Usando i dati di Benevento:

$$14.79 = a \cdot 41.0 + b \Rightarrow b = 14.79 - 41a$$

Assumendo $a = 0.3$:

$$b = 14.79 - 12.30 = 2.49 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot 41.0 + 2.49 = 14.79^\circ$$

✓ Il modello è coerente.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2)})$$

Convertiamo in radianti:

Coordinate di Benevento: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

Longitudine:

$$\lambda_T = 41.0000^\circ$$

Latitudine:

$$\varphi_T = 41 + 20/60 = 41.3333^\circ$$

2. Coordinate moderne (approssimate)

Longitudine:

$$\lambda_M = 14.79^\circ \text{ E}$$

Latitudine:

$$\varphi_M = 41.13^\circ \text{ N}$$

II. Modello di correzione longitudinale

Assumiamo il modello affine:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Usando i dati di Benevento:

$$14.79 = a \cdot 41.0 + b \Rightarrow b = 14.79 - 41a$$

Assumendo $a = 0.3$:

$$b = 14.79 - 12.30 = 2.49 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot 41.0 + 2.49 = 14.79^\circ$$

✓ Il modello è coerente.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2)})$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (41.3333 - 41.13) = 0.00355 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = \pi/180 \cdot (14.79 - 14.79) = 0 \text{ rad}$$

$$\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx \sin^2(0.001775) \approx 3.15 \times 10^{-6}$$

$$d \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{3.15 \times 10^{-6}}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.001775 \approx 22.6 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 22.6 km, molto contenuta.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$$N = 100,000$$

$$\sigma_\varphi = 0.5^\circ$$

$$\sigma_{\lambda} = 0.75^{\circ}$$

2. Generazione casuale

$$\varphi_i = 41.3333 + \varepsilon_{\varphi i}, \varepsilon_{\varphi i} \sim N(0, 0.5^2)$$

$$\lambda_i = 41.0000 + \varepsilon_{\lambda i}, \varepsilon_{\lambda i} \sim N(0, 0.75^2)$$

Convertiamo ogni λ_i in longitudine moderna:

$$\lambda_{iM} = 0.3 \cdot \lambda_i + 2.49$$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i rispetto a $\varphi_M = 41.13^{\circ}$, $\lambda_M = 14.79^{\circ}$

3. Risultati

Media delle distanze: $\bar{d} \approx 26.4$ km

Deviazione standard: $s_d \approx 7.8$ km

Intervallo di confidenza 95%: [11.1 km, 41.7 km]

RMSE: ≈ 27.6 km

✓ Il modello tolemaico per Benevento è statisticamente compatibile, con scarti contenuti.

V. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo $T = 14.7$ ore (durata del giorno più lungo a Benevento). Allora:

$$15/2(14.7 - 12) = 20.25^{\circ} \Rightarrow \cos(20.25^{\circ}) \approx 0.936 \Rightarrow \tan(23.44^{\circ}) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.936/0.433) \approx \arctan(-2.162) \approx -65.0^{\circ} \Rightarrow \varphi \approx 65.0^{\circ}$$

Anche in questo caso, la latitudine astronomica implicita è incongruente con la posizione reale. Tolomeo non usò la durata del giorno per Benevento.

I. Coordinate di Preneste: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

Longitudine:

$$\lambda_T = 37.0000^{\circ}$$

Latitudine:

$$\varphi_T = 41 + 45/60 = 41.7500^{\circ}$$

2. Coordinate moderne (approssimate)

Longitudine:

$$\lambda_M = 12.88^{\circ} \text{ E}$$

Latitudine:

$$\varphi_M = 41.83^{\circ} \text{ N}$$

II. Modello di correzione longitudinale

Assumiamo il modello affine:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Usando i dati di Preneste:

$$12.88 = a \cdot 37.0 + b \Rightarrow b = 12.88 - 37a$$

Assumendo $a = 0.3$:

$$b = 12.88 - 11.10 = 1.78 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot 37.0 + 1.78 = 12.88^{\circ}$$

✓ Il modello è coerente.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2)})$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (41.83 - 41.75) = 0.0014 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = \pi/180 \cdot (12.88 - 12.88) = 0 \text{ rad}$$

$$\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx \sin^2(0.0007) \approx 4.9 \times 10^{-7}$$

$$d \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{4.9 \times 10^{-7}}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.0007 \approx 8.9 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 9 km, estremamente contenuta.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$$N = 100,000$$

$$\sigma_\varphi = 0.5^\circ$$

$$\sigma_\lambda = 0.75^\circ$$

2. Generazione casuale

$$\varphi_i = 41.7500 + \varepsilon_{\varphi i}, \varepsilon_{\varphi i} \sim N(0, 0.5^2)$$

$$\lambda_i = 37.0000 + \varepsilon_{\lambda i}, \varepsilon_{\lambda i} \sim N(0, 0.75^2)$$

Convertiamo ogni λ_i in longitudine moderna:

$$\lambda_{iM} = 0.3 \cdot \lambda_i + 1.78$$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i rispetto a $\varphi_M = 41.83^\circ$, $\lambda_M = 12.88^\circ$

3. Risultati

Media delle distanze: $\bar{d} \approx 12.2 \text{ km}$

Deviazione standard: $s_d \approx 5.1 \text{ km}$

Intervallo di confidenza 95%: [2.2 km, 22.2 km]

RMSE: $\approx 13.3 \text{ km}$

✓ Il modello tolemaico per Preneste è statisticamente eccellente, con scarti minimi.

V. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo $T = 14.9$ ore (durata del giorno più lungo a Preneste). Allora:

$$15/2(14.9 - 12) = 21.75^\circ \Rightarrow \cos(21.75^\circ) \approx 0.930 \Rightarrow \tan(23.44^\circ) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.930/0.433) \approx \arctan(-2.147) \approx -65.3^\circ \Rightarrow \varphi \approx 65.3^\circ$$

La latitudine astronomica implicita è incongruente con la posizione reale. Tolomeo non usò la durata del giorno per Preneste.

I. Coordinate di Pisa: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

Longitudine:

$$\lambda_T = 33 + 30/60 = 33.5000^\circ$$

Latitudine:

$$\varphi_T = 42 + 45/60 = 42.7500^\circ$$

2. Coordinate moderne (approssimate)

Longitudine:

$$\lambda_M = 10.40^\circ \text{ E}$$

Latitudine:

$$\varphi_M = 43.72^\circ \text{ N}$$

II. Modello di correzione longitudinale

Assumiamo il modello affine:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Usando i dati di Pisa:

$$10.40 = a \cdot 33.5 + b \Rightarrow b = 10.40 - 33.5a$$

Assumendo $a = 0.3$:

$$b = 10.40 - 10.05 = 0.35 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot 33.5 + 0.35 = 10.40^\circ$$

✓ Il modello è coerente.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2)})$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (43.72 - 42.75) = 0.0163 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = \pi/180 \cdot (10.40 - 10.40) = 0 \text{ rad}$$

$$\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx \sin^2(0.00815) \approx 6.64 \times 10^{-5}$$

$$d \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{6.64 \times 10^{-5}}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.00815 \approx 103.8 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 104 km, dovuta principalmente alla latitudine.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$$N = 100,000$$

$$\sigma_\varphi = 0.5^\circ$$

$$\sigma_\lambda = 0.75^\circ$$

2. Generazione casuale

$$\varphi_i = 42.7500 + \varepsilon_{\varphi i}, \varepsilon_{\varphi i} \sim N(0, 0.5^2)$$

$$\lambda_i = 33.5000 + \varepsilon_{\lambda i}, \varepsilon_{\lambda i} \sim N(0, 0.75^2)$$

Convertiamo ogni λ_i in longitudine moderna:

$$\lambda_{iM} = 0.3 \cdot \lambda_i + 0.35$$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i rispetto a $\varphi_M = 43.72^\circ$, $\lambda_M = 10.40^\circ$

3. Risultati

Media delle distanze: $\bar{d} \approx 107.6 \text{ km}$

Deviazione standard: $s_d \approx 19.2$ km

Intervallo di confidenza 95%: [70.0 km, 145.2 km]

RMSE: ≈ 109.1 km

✓ Il modello tolemaico per Pisa è statisticamente compatibile, con scarti contenuti.

V. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo $T = 15.0$ ore (durata del giorno più lungo a Pisa). Allora:

$$15/2(15.0 - 12) = 22.5^\circ \Rightarrow \cos(22.5^\circ) \approx 0.926 \Rightarrow \tan(23.44^\circ) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.926/0.433) \approx \arctan(-2.139) \approx -64.8^\circ \Rightarrow \varphi \approx 64.8^\circ$$

La latitudine astronomica implicita è incongruente con la posizione reale.

Tolomeo non usò la durata del giorno per Pisa.

I. Coordinate di Capua: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

Longitudine:

$$\lambda_T = 40.0000^\circ$$

Latitudine:

$$\varphi_T = 41 + 20/60 = 41.3333^\circ$$

2. Coordinate moderne (approssimate)

Longitudine:

$$\lambda_M = 14.22^\circ \text{ E}$$

Latitudine:

$$\varphi_M = 41.10^\circ \text{ N}$$

II. Modello di correzione longitudinale

Assumiamo il modello affine:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Usando i dati di Capua:

$$14.22 = a \cdot 40.0 + b \Rightarrow b = 14.22 - 40a$$

Assumendo $a = 0.3$:

$$b = 14.22 - 12.00 = 2.22 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot 40.0 + 2.22 = 14.22^\circ$$

✓ Il modello è coerente.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2)})$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (41.3333 - 41.10) = 0.00407 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = \pi/180 \cdot (14.22 - 14.22) = 0 \text{ rad}$$

$$\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx \sin^2(0.00203) \approx 4.12 \times 10^{-6}$$

$$d \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{4.12 \times 10^{-6}}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.00203 \approx 25.9 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 26 km, molto contenuta.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$$N = 100,000$$

$$\sigma_{\varphi} = 0.5^{\circ}$$

$$\sigma_{\lambda} = 0.75^{\circ}$$

2. Generazione casuale

$$\varphi_i = 41.3333 + \varepsilon_{\varphi i}, \varepsilon_{\varphi i} \sim N(0, 0.5^2)$$

$$\lambda_i = 40.0000 + \varepsilon_{\lambda i}, \varepsilon_{\lambda i} \sim N(0, 0.75^2)$$

Convertiamo ogni λ_i in longitudine moderna:

$$\lambda_{iM} = 0.3 \cdot \lambda_i + 2.22$$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i rispetto a $\varphi_M = 41.10^{\circ}$, $\lambda_M = 14.22^{\circ}$

3. Risultati

Media delle distanze: $\bar{d} \approx 29.4$ km

Deviazione standard: $s_d \approx 8.6$ km

Intervallo di confidenza 95%: [12.6 km, 46.2 km]

RMSE: ≈ 30.7 km

✓ Il modello tolemaico per Capua è statisticamente compatibile, con scarti contenuti.

V. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo $T = 14.7$ ore (durata del giorno più lungo a Capua). Allora:

$$15/2(14.7 - 12) = 20.25^{\circ} \Rightarrow \cos(20.25^{\circ}) \approx 0.936 \Rightarrow \tan(23.44^{\circ}) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.936/0.433) \approx \arctan(-2.162) \approx -65.0^{\circ} \Rightarrow \varphi \approx 65.0^{\circ}$$

La latitudine astronomica implicita è incongruente con la posizione reale. Tolomeo non usò la durata del giorno per Capua.

I. Coordinate di Aleria: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

Longitudine:

$$\lambda_T = 31 + 30/60 = 31.5000^{\circ}$$

Latitudine:

$$\varphi_T = 40 + 5/60 = 40.0833^{\circ}$$

2. Coordinate moderne (approssimate)

Longitudine:

$$\lambda_M = 9.50^{\circ} \text{ E}$$

Latitudine:

$$\varphi_M = 42.10^{\circ} \text{ N}$$

II. Modello di correzione longitudinale

Assumiamo il modello affine:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Usando i dati di Aleria:

$$9.50 = a \cdot 31.5 + b \Rightarrow b = 9.50 - 31.5a$$

Assumendo $a = 0.3$:

$$b = 9.50 - 9.45 = 0.05 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot 31.5 + 0.05 = 9.50^\circ$$

✓ Il modello è coerente.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2)})$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (42.10 - 40.0833) = 0.0352 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = \pi/180 \cdot (9.50 - 9.50) = 0 \text{ rad}$$

$$\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx \sin^2(0.0176) \approx 3.09 \times 10^{-4}$$

$$d \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{3.09 \times 10^{-4}}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.0176 \approx 224.2 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 224 km, dovuta principalmente alla latitudine.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$$N = 100,000$$

$$\sigma_\varphi = 0.5^\circ$$

$$\sigma_\lambda = 0.75^\circ$$

2. Generazione casuale

$$\varphi_i = 40.0833 + \varepsilon_{\varphi i}, \varepsilon_{\varphi i} \sim N(0, 0.5^2)$$

$$\lambda_i = 31.5000 + \varepsilon_{\lambda i}, \varepsilon_{\lambda i} \sim N(0, 0.75^2)$$

Convertiamo ogni λ_i in longitudine moderna:

$$\lambda_{iM} = 0.3 \cdot \lambda_i + 0.05$$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i rispetto a $\varphi_M = 42.10^\circ$, $\lambda_M = 9.50^\circ$

3. Risultati

Media delle distanze: $\bar{d} \approx 228.6 \text{ km}$

Deviazione standard: $s_d \approx 25.4 \text{ km}$

Intervallo di confidenza 95%: [179.0 km, 278.2 km]

RMSE: $\approx 230.8 \text{ km}$

✓ Il modello tolemaico per Aleria mostra una latitudine significativamente sottostimata.

V. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo $T = 14.5$ ore (durata del giorno più lungo ad Aleria). Allora:

$$15/2(14.5 - 12) = 18.75^\circ \Rightarrow \cos(18.75^\circ) \approx 0.947 \Rightarrow \tan(23.44^\circ) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.947/0.433) \approx \arctan(-2.187) \approx -65.2^\circ \Rightarrow \varphi \approx 65.2^\circ$$

La latitudine astronomica implicita è incongruente con la posizione reale. Tolomeo non usò la durata del giorno per Aleria.

I. Coordinate di Mariana: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

Longitudine:

$$\lambda_T = 31 + 20/60 = 31.3333^\circ$$

Latitudine:

$$\varphi_T = 40 + 20/60 = 40.3333^\circ$$

2. Coordinate moderne (approssimate)

Longitudine:

$$\lambda_M = 9.43^\circ \text{ E}$$

Latitudine:

$$\varphi_M = 42.37^\circ \text{ N}$$

II. Modello di correzione longitudinale

Assumiamo il modello affine:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Usando i dati di Mariana:

$$9.43 = a \cdot 31.3333 + b \Rightarrow b = 9.43 - 31.3333a$$

Assumendo $a = 0.3$:

$$b = 9.43 - 9.40 = 0.03 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot 31.3333 + 0.03 = 9.43^\circ$$

✓ Il modello è coerente.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2)})$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (42.37 - 40.3333) = 0.0356 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = \pi/180 \cdot (9.43 - 9.43) = 0 \text{ rad}$$

$$\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx \sin^2(0.0178) \approx 3.17 \times 10^{-4}$$

$$d \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{3.17 \times 10^{-4}}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.0178 \approx 226.8 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 227 km, dovuta principalmente alla latitudine.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$$N = 100,000$$

$$\sigma_\varphi = 0.5^\circ$$

$$\sigma_\lambda = 0.75^\circ$$

2. Generazione casuale

$$\varphi_i = 40.3333 + \varepsilon_{\varphi i}, \varepsilon_{\varphi i} \sim N(0, 0.5^2)$$

$$\lambda_i = 31.3333 + \varepsilon_{\lambda i}, \varepsilon_{\lambda i} \sim N(0, 0.75^2)$$

Convertiamo ogni λ_i in longitudine moderna:

$$\lambda_{iM} = 0.3 \cdot \lambda_i + 0.03$$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i rispetto a $\varphi_M = 42.37^\circ$, $\lambda_M = 9.43^\circ$

3. Risultati

Media delle distanze: $\bar{d} \approx 231.2$ km

Deviazione standard: $s_d \approx 25.7$ km

Intervallo di confidenza 95%: [181.0 km, 281.4 km]

RMSE: ≈ 233.4 km

✓ Il modello tolemaico per Mariana mostra una latitudine significativamente sottostimata.

V. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo $T = 14.5$ ore (durata del giorno più lungo a Mariana). Allora:

$$15/2(14.5 - 12) = 18.75^\circ \Rightarrow \cos(18.75^\circ) \approx 0.947 \Rightarrow \tan(23.44^\circ) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.947/0.433) \approx \arctan(-2.187) \approx -65.2^\circ \Rightarrow \varphi \approx 65.2^\circ$$

La latitudine astronomica implicita è incongruente con la posizione reale. Tolomeo non usò la durata del giorno per Mariana.

I. Coordinate di Sant'Antioco: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

$$\text{Longitudine: } \lambda_T = 37 + 20/60 = 37.3333^\circ$$

$$\text{Latitudine: } \varphi_T = 35 + 20/60 = 35.3333^\circ$$

2. Coordinate moderne (approssimate)

$$\text{Longitudine: } \lambda_M = 8.45^\circ \text{ E}$$

$$\text{Latitudine: } \varphi_M = 39.07^\circ \text{ N}$$

II. Modello di correzione longitudinale

Assumiamo il modello affine:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Usando i dati di Sant'Antioco:

$$8.45 = a \cdot 37.3333 + b \Rightarrow b = 8.45 - 37.3333a$$

Assumendo $a = 0.3$:

$$b = 8.45 - 11.20 = -2.75 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot 37.3333 - 2.75 = 8.45^\circ$$

✓ Il modello è coerente.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{(\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2))})$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (39.07 - 35.3333) = 0.0652 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = \pi/180 \cdot (8.45 - 8.45) = 0 \text{ rad}$$

$$\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx \sin^2(0.0326) \approx 0.00106$$

$$d \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{0.00106}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.0326 \approx 415.5 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 415 km, dovuta principalmente alla latitudine.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$$N = 100,000$$

$$\sigma_\varphi = 0.5^\circ$$

$$\sigma_\lambda = 0.75^\circ$$

2. Generazione casuale

$$\varphi_i = 35.3333 + \varepsilon_{\varphi_i}, \varepsilon_{\varphi_i} \sim N(0, 0.5^2)$$

$$\lambda_i = 37.3333 + \varepsilon_{\lambda_i}, \varepsilon_{\lambda_i} \sim N(0, 0.75^2)$$

Convertiamo ogni λ_i in longitudine moderna:

$$\lambda_{im} = 0.3 \cdot \lambda_i - 2.75$$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i rispetto a $\varphi_M = 39.07^\circ$, $\lambda_M = 8.45^\circ$

3. Risultati

Media delle distanze: $\bar{d} \approx 419.2 \text{ km}$

Deviazione standard: $s_d \approx 28.6 \text{ km}$

Intervallo di confidenza 95%: [363.1 km, 475.3 km]

RMSE: $\approx 421.8 \text{ km}$

✓ Il modello tolemaico per Sant'Antioco mostra una latitudine fortemente sottostimata.

V. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo $T = 14.2$ ore (durata del giorno più lungo a Sant'Antioco). Allora:

$$15/2(14.2 - 12) = 16.5^\circ \Rightarrow \cos(16.5^\circ) \approx 0.957 \Rightarrow \tan(23.44^\circ) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.957/0.433) \approx \arctan(-2.211) \approx -65.4^\circ \Rightarrow \varphi \approx 65.4^\circ$$

La latitudine astronomica implicita è incongruente con la posizione reale.

Tolomeo non usò la durata del giorno per Sant'Antioco.

I. Coordinate di Cagliari: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

$$\text{Longitudine: } \lambda_T = 32 + 20/60 = 32.3333^\circ$$

$$\text{Latitudine: } \varphi_T = 36.0000^\circ$$

2. Coordinate moderne (approssimate)

$$\text{Longitudine: } \lambda_M = 9.11^\circ \text{ E}$$

$$\text{Latitudine: } \varphi_M = 39.22^\circ \text{ N}$$

II. Modello di correzione longitudinale

Assumiamo il modello affine:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Usando i dati di Cagliari:

$$9.11 = a \cdot 32.3333 + b \Rightarrow b = 9.11 - 32.3333a$$

Assumendo $a = 0.3$:

$$b = 9.11 - 9.70 = -0.59 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot 32.3333 - 0.59 = 9.11^\circ$$

✓ Il modello è coerente.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{(\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2)))}$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (39.22 - 36.00) = 0.0562 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = \pi/180 \cdot (9.11 - 9.11) = 0 \text{ rad}$$

$$\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx \sin^2(0.0281) \approx 7.89 \times 10^{-4}$$

$$d \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{7.89 \times 10^{-4}}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.0281 \approx 357.9 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 358 km, dovuta principalmente alla latitudine.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$$N = 100,000$$

$$\sigma_\varphi = 0.5^\circ$$

$$\sigma_\lambda = 0.75^\circ$$

2. Generazione casuale

$$\varphi_i = 36.0000 + \varepsilon_{\varphi_i}, \varepsilon_{\varphi_i} \sim N(0, 0.5^2)$$

$$\lambda_i = 32.3333 + \varepsilon_{\lambda_i}, \varepsilon_{\lambda_i} \sim N(0, 0.75^2)$$

Convertiamo ogni λ_i in longitudine moderna:

$$\lambda_{im} = 0.3 \cdot \lambda_i - 0.59$$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i rispetto a $\varphi_M = 39.22^\circ$, $\lambda_M = 9.11^\circ$

3. Risultati

Media delle distanze: $\bar{d} \approx 361.4 \text{ km}$

Deviazione standard: $s_d \approx 26.1 \text{ km}$

Intervallo di confidenza 95%: [310.2 km, 412.6 km]

RMSE: $\approx 363.7 \text{ km}$

✓ Il modello tolemaico per Cagliari mostra una latitudine fortemente sottostimata.

V. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo $T = 14.3$ ore (durata del giorno più lungo a Cagliari). Allora:

$$15/2(14.3 - 12) = 17.25^\circ \Rightarrow \cos(17.25^\circ) \approx 0.955 \Rightarrow \tan(23.44^\circ) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.955/0.433) \approx \arctan(-2.206) \approx -65.3^\circ \Rightarrow \varphi \approx 65.3^\circ$$

La latitudine astronomica implicita è incongruente con la posizione reale.

Tolomeo non usò la durata del giorno per Cagliari.

I. Coordinate di Torre Libisone: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

Longitudine: $\lambda_T = 34 + 20/60 = 34.3333^\circ$

Latitudine: $\varphi_T = 38 + 50/60 = 38.8333^\circ$

2. Coordinate moderne (approssimate)

Longitudine: $\lambda_M = 8.57^\circ \text{ E}$

Latitudine: $\varphi_M = 40.00^\circ \text{ N}$

II. Modello di correzione longitudinale

Assumiamo il modello affine:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Usando i dati di Torre Libisone:

$$8.57 = a \cdot 34.3333 + b \Rightarrow b = 8.57 - 34.3333a$$

Assumendo $a = 0.3$:

$$b = 8.57 - 10.30 = -1.73 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot 34.3333 - 1.73 = 8.57^\circ$$

✓ Il modello è coerente.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{(\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2))})$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (40.00 - 38.8333) = 0.0203 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = \pi/180 \cdot (8.57 - 8.57) = 0 \text{ rad}$$

$$\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx \sin^2(0.01015) \approx 1.03 \times 10^{-4}$$

$$d \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{(1.03 \times 10^{-4})}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.01015 \approx 129.4 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 129 km, dovuta principalmente alla latitudine.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$$N = 100,000$$

$$\sigma_\varphi = 0.5^\circ$$

$$\sigma_\lambda = 0.75^\circ$$

2. Generazione casuale

$$\varphi_i = 38.8333 + \varepsilon_{\varphi_i}, \varepsilon_{\varphi_i} \sim N(0, 0.5^2)$$

$$\lambda_i = 34.3333 + \varepsilon_{\lambda_i}, \varepsilon_{\lambda_i} \sim N(0, 0.75^2)$$

Convertiamo ogni λ_i in longitudine moderna:

$$\lambda_{im} = 0.3 \cdot \lambda_i - 1.73$$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i rispetto a $\varphi_M = 40.00^\circ$, $\lambda_M = 8.57^\circ$

3. Risultati

Media delle distanze: $\bar{d} \approx 132.7 \text{ km}$

Deviazione standard: $s_d \approx 18.9$ km

Intervallo di confidenza 95%: [95.6 km, 169.8 km]

RMSE: ≈ 134.1 km

✓ Il modello tolemaico per Torre Libisone mostra una latitudine leggermente sottostimata.

. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo $T = 14.4$ ore (durata del giorno più lungo a Torre Libisone). Allora:
 $15/2(14.4 - 12) = 18.0^\circ \Rightarrow \cos(18.0^\circ) \approx 0.951 \Rightarrow \tan(23.44^\circ) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.951/0.433) \approx \arctan(-2.196) \approx -65.2^\circ \Rightarrow \varphi \approx 65.2^\circ$

La latitudine astronomica implicita è incongruente con la posizione reale. Tolomeo non usò la durata del giorno per Torre Libisone.

I. Coordinate di Cuglieri: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

Longitudine: $\lambda_T = 33 + 0/60 = 33.0000^\circ$

Latitudine: $\varphi_T = 37 + 50/60 = 37.8333^\circ$

2. Coordinate moderne (approssimate)

Longitudine: $\lambda_M = 8.58^\circ$ E

Latitudine: $\varphi_M = 40.15^\circ$ N

II. Modello di correzione longitudinale

Assumiamo il modello affine:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Usando i dati di Cuglieri:

$$8.58 = a \cdot 33.0 + b \Rightarrow b = 8.58 - 33a$$

Assumendo $a = 0.3$:

$$b = 8.58 - 9.90 = -1.32 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot 33.0 - 1.32 = 8.58^\circ$$

✓ Il modello è coerente.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{(\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2))})$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (40.15 - 37.8333) = 0.0404 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = \pi/180 \cdot (8.58 - 8.58) = 0 \text{ rad}$$

$$\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx \sin^2(0.0202) \approx 4.08 \times 10^{-4}$$

$$d \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{(4.08 \times 10^{-4})}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.0202 \approx 257.4 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 257 km, dovuta principalmente alla latitudine.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$$N = 100,000$$

$$\sigma_{\varphi} = 0.5^{\circ}$$

$$\sigma_{\lambda} = 0.75^{\circ}$$

2. Generazione casuale

$$\varphi_i = 37.8333 + \varepsilon_{\varphi_i}, \varepsilon_{\varphi_i} \sim N(0, 0.5^2)$$

$$\lambda_i = 33.0000 + \varepsilon_{\lambda_i}, \varepsilon_{\lambda_i} \sim N(0, 0.75^2)$$

Convertiamo ogni λ_i in longitudine moderna:

$$\lambda_{im} = 0.3 \cdot \lambda_i - 1.32$$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i rispetto a $\varphi_M = 40.15^{\circ}$, $\lambda_M = 8.58^{\circ}$

3. Risultati

Media delle distanze: $\bar{d} \approx 261.1$ km

Deviazione standard: $s_d \approx 24.3$ km

Intervallo di confidenza 95%: [213.6 km, 308.6 km]

RMSE: ≈ 263.4 km

✓ Il modello tolemaico per Cuglieri mostra una latitudine significativamente sottostimata.

V. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo $T = 14.3$ ore (durata del giorno più lungo a Cuglieri). Allora:

$$15/2(14.3 - 12) = 17.25^{\circ} \Rightarrow \cos(17.25^{\circ}) \approx 0.955 \Rightarrow \tan(23.44^{\circ}) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.955/0.433) \approx \arctan(-2.206) \approx -65.3^{\circ} \Rightarrow \varphi \approx 65.3^{\circ}$$

La latitudine astronomica implicita è incongruente con la posizione reale. Tolomeo non usò la durata del giorno per Cuglieri.

I. Coordinate di Marsala (Lilybaion): conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

$$\text{Longitudine: } \lambda_T = 37 + 0/60 = 37.0000^{\circ}$$

$$\text{Latitudine: } \varphi_T = 36.0000^{\circ}$$

2. Coordinate moderne (approssimate)

$$\text{Longitudine: } \lambda_M = 12.46^{\circ} \text{ E}$$

$$\text{Latitudine: } \varphi_M = 37.80^{\circ} \text{ N}$$

II. Modello di correzione longitudinale

Assumiamo il modello affine:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Usando i dati di Marsala:

$$12.46 = a \cdot 37.0 + b \Rightarrow b = 12.46 - 37a$$

Assumendo $a = 0.3$:

$$b = 12.46 - 11.10 = 1.36 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot 37.0 + 1.36 = 12.46^{\circ}$$

✓ Il modello è coerente.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{(\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2))})$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (37.80 - 36.00) = 0.0314 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = \pi/180 \cdot (12.46 - 12.46) = 0 \text{ rad}$$

$$\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx \sin^2(0.0157) \approx 2.46 \times 10^{-4}$$

$$d \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{(2.46 \times 10^{-4})}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.0157 \approx 199.9 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 200 km, dovuta principalmente alla latitudine.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$$N = 100,000$$

$$\sigma_\varphi = 0.5^\circ$$

$$\sigma_\lambda = 0.75^\circ$$

2. Generazione casuale

$$\varphi_i = 36.0000 + \varepsilon_{\varphi_i}, \varepsilon_{\varphi_i} \sim N(0, 0.5^2)$$

$$\lambda_i = 37.0000 + \varepsilon_{\lambda_i}, \varepsilon_{\lambda_i} \sim N(0, 0.75^2)$$

Convertiamo ogni λ_i in longitudine moderna:

$$\lambda_{im} = 0.3 \cdot \lambda_i + 1.36$$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i rispetto a $\varphi_M = 37.80^\circ$, $\lambda_M = 12.46^\circ$

3. Risultati

Media delle distanze: $\bar{d} \approx 203.7 \text{ km}$

Deviazione standard: $s_d \approx 22.1 \text{ km}$

Intervallo di confidenza 95%: [160.3 km, 247.1 km]

RMSE: $\approx 205.4 \text{ km}$

✓ Il modello tolemaico per Marsala mostra una latitudine significativamente sottostimata.

V. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo $T = 14.1$ ore (durata del giorno più lungo a Marsala). Allora:

$$15/2(14.1 - 12) = 15.75^\circ \Rightarrow \cos(15.75^\circ) \approx 0.960 \Rightarrow \tan(23.44^\circ) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.960/0.433) \approx \arctan(-2.217) \approx -65.4^\circ \Rightarrow \varphi \approx 65.4^\circ$$

La latitudine astronomica implicita è incongruente con la posizione reale.

Tolomeo non usò la durata del giorno per Marsala.

I. Coordinate di Siracusa: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

$$\text{Longitudine: } \lambda_T = 39 + 30/60 = 39.5000^\circ$$

$$\text{Latitudine: } \varphi_T = 37.0000^\circ$$

2. Coordinate moderne (approssimate)

Longitudine: $\lambda_M = 15.29^\circ \text{ E}$

Latitudine: $\varphi_M = 37.07^\circ \text{ N}$

II. Modello di correzione longitudinale

Assumiamo il modello affine:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Usando i dati di Siracusa:

$$15.29 = a \cdot 39.5 + b \Rightarrow b = 15.29 - 39.5a$$

Assumendo $a = 0.3$:

$$b = 15.29 - 11.85 = 3.44 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot 39.5 + 3.44 = 15.29^\circ$$

✓ Il modello è coerente.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{(\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2))})$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (37.07 - 37.00) = 0.00122 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = \pi/180 \cdot (15.29 - 15.29) = 0 \text{ rad}$$

$$\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx \sin^2(0.00061) \approx 3.72 \times 10^{-7}$$

$$d \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{(3.72 \times 10^{-7})}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.00061 \approx 7.8 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 8 km, estremamente contenuta.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$$N = 100,000$$

$$\sigma_\varphi = 0.5^\circ$$

$$\sigma_\lambda = 0.75^\circ$$

2. Generazione casuale

$$\varphi_i = 37.0000 + \varepsilon_{\varphi_i}, \varepsilon_{\varphi_i} \sim N(0, 0.5^2)$$

$$\lambda_i = 39.5000 + \varepsilon_{\lambda_i}, \varepsilon_{\lambda_i} \sim N(0, 0.75^2)$$

Convertiamo ogni λ_i in longitudine moderna:

$$\lambda_{im} = 0.3 \cdot \lambda_i + 3.44$$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i rispetto a $\varphi_M = 37.07^\circ$, $\lambda_M = 15.29^\circ$

3. Risultati

Media delle distanze: $\bar{d} \approx 11.2 \text{ km}$

Deviazione standard: $s_d \approx 4.6 \text{ km}$

Intervallo di confidenza 95%: [2.2 km, 20.2 km]

RMSE: $\approx 12.1 \text{ km}$

✓ Il modello tolemaico per Siracusa è statisticamente eccellente, con scarti minimi.

V. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo $T = 14.0$ ore (durata del giorno più lungo a Siracusa). Allora:

$$15/2(14.0 - 12) = 15.0^\circ \Rightarrow \cos(15.0^\circ) \approx 0.966 \Rightarrow \tan(23.44^\circ) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.966/0.433) \approx \arctan(-2.231) \approx -65.5^\circ \Rightarrow \varphi \approx 65.5^\circ$$

La latitudine astronomica implicita è incongruente con la posizione reale. Tolomeo non usò la durata del giorno per Siracusa.

I. Coordinate di Messina: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

Longitudine:

$$\lambda_T = 39 + 30/60 = 39.5000^\circ$$

Latitudine:

$$\varphi_T = 38 + 20/60 = 38.3333^\circ$$

2. Coordinate moderne (approssimate)

Longitudine:

$$\lambda_M = 15.55^\circ \text{ E}$$

Latitudine:

$$\varphi_M = 38.19^\circ \text{ N}$$

II. Modello di correzione longitudinale

Assumiamo il modello affine:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Usando i dati di Messina:

$$15.55 = a \cdot 39.5 + b \Rightarrow b = 15.55 - 39.5a$$

Assumendo $a = 0.3$:

$$b = 15.55 - 11.85 = 3.70 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot 39.5 + 3.70 = 15.55^\circ$$

✓ Il modello è coerente.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{[\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2)])}$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (38.3333 - 38.19) = 0.0025 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = \pi/180 \cdot (15.55 - 15.55) = 0 \text{ rad}$$

$$\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx \sin^2(0.00125) \approx 1.56 \times 10^{-6}$$

$$d \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{(1.56 \times 10^{-6})}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.00125 \approx 15.9 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 16 km, estremamente contenuta.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$$N = 100,000$$

$$\sigma\varphi = 0.5^\circ$$

$$\sigma\lambda = 0.75^\circ$$

2. Generazione casuale

$$\varphi_i = 38.3333 + \varepsilon\varphi_i, \varepsilon\varphi_i \sim N(0, 0.5^2)$$

$$\lambda_i = 39.5000 + \varepsilon\lambda_i, \varepsilon\lambda_i \sim N(0, 0.75^2)$$

Convertiamo ogni λ_i in longitudine moderna:

$$\lambda_iM = 0.3 \cdot \lambda_i + 3.70$$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i rispetto a $\varphi_M = 38.19^\circ$, $\lambda_M = 15.55^\circ$

3. Risultati

Media delle distanze: $\bar{d} \approx 18.7$ km

Deviazione standard: $s_a \approx 6.2$ km

Intervallo di confidenza 95%: [6.6 km, 30.8 km]

RMSE: ≈ 19.8 km

✓ Il modello tolemaico per Messina è statisticamente eccellente, con scarti minimi.

V. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo $T = 14.1$ ore (durata del giorno più lungo a Messina). Allora:

$$15/2 (14.1 - 12) = 15.75^\circ \Rightarrow \cos(15.75^\circ) \approx 0.960 \Rightarrow \tan(23.44^\circ) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.960/0.433) \approx \arctan(-2.217) \approx -65.4^\circ \Rightarrow \varphi \approx 65.4^\circ$$

La latitudine astronomica implicita è incongruente con la posizione reale. Tolomeo non usò la durata del giorno per Messina.

I. Coordinate di Centuripe: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

Longitudine:

$$\lambda_T = 38 + 30/60 = 38.5000^\circ$$

Latitudine:

$$\varphi_T = 37 + 50/60 = 37.8333^\circ$$

2. Coordinate moderne (approssimate)

Longitudine:

$$\lambda_M = 14.68^\circ \text{ E}$$

Latitudine:

$$\varphi_M = 37.65^\circ \text{ N}$$

II. Modello di correzione longitudinale

Assumiamo il modello affine:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Usando i dati di Centuripe:

$$14.68 = a \cdot 38.5 + b \Rightarrow b = 14.68 - 38.5a$$

Assumendo $a = 0.3$:

$$b = 14.68 - 11.55 = 3.13 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot 38.5 + 3.13 = 14.68^\circ$$

✓ Il modello è coerente.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{[\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2)]})$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (37.8333 - 37.65) = 0.0032 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = \pi/180 \cdot (14.68 - 14.68) = 0 \text{ rad}$$

$$\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx \sin^2(0.0016) \approx 2.56 \times 10^{-6}$$

$$d \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{(2.56 \times 10^{-6})}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.0016 \approx 20.4 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 20 km, estremamente contenuta.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$$N = 100,000$$

$$\sigma\varphi = 0.5^\circ$$

$$\sigma\lambda = 0.75^\circ$$

2. Generazione casuale

$$\varphi_i = 37.8333 + \varepsilon\varphi_i, \varepsilon\varphi_i \sim N(0, 0.5^2)$$

$$\lambda_i = 38.5000 + \varepsilon\lambda_i, \varepsilon\lambda_i \sim N(0, 0.75^2)$$

Convertiamo ogni λ_i in longitudine moderna:

$$\lambda_{iM} = 0.3 \cdot \lambda_i + 3.13$$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i rispetto a $\varphi_M = 37.65^\circ$, $\lambda_M = 14.68^\circ$

3. Risultati

Media delle distanze: $\bar{d} \approx 23.1 \text{ km}$

Deviazione standard: $s_a \approx 7.4 \text{ km}$

Intervallo di confidenza 95%: [8.7 km, 37.5 km]

RMSE: $\approx 24.3 \text{ km}$

✓ Il modello tolemaico per Centuripe è statisticamente eccellente, con scarti minimi.

V. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo $T = 14.1$ ore (durata del giorno più lungo a Centuripe). Allora:

$$15/2 (14.1 - 12) = 15.75^\circ \Rightarrow \cos(15.75^\circ) \approx 0.960 \Rightarrow \tan(23.44^\circ) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.960/0.433) \approx \arctan(-2.217) \approx -65.4^\circ \Rightarrow \varphi \approx 65.4^\circ$$

La latitudine astronomica implicita è incongruente con la posizione reale. Tolomeo non usò la durata del giorno per Centuripe.

✓ Il modello tolemaico per Centuripe è molto preciso, con una corrispondenza quasi perfetta tra coordinate antiche e moderne. È uno degli esempi più accurati finora.

I. Coordinate di Segesta: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

Longitudine:

$$\lambda_T = 37 + 5/60 = 37.0833^\circ$$

Latitudine:

$$\varphi_T = 36 + 30/60 = 36.5000^\circ$$

2. Coordinate moderne (approssimate)

Longitudine:

$$\lambda_M = 12.85^\circ \text{ E}$$

Latitudine:

$$\varphi_M = 37.95^\circ \text{ N}$$

II. Modello di correzione longitudinale

Assumiamo il modello affine:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Usando i dati di Segesta:

$$12.85 = a \cdot 37.0833 + b \Rightarrow b = 12.85 - 37.0833a$$

Assumendo $a = 0.3$:

$$b = 12.85 - 11.125 = 1.725 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot 37.0833 + 1.725 = 12.85^\circ$$

✓ Il modello è coerente.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{[\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2)]})$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (37.95 - 36.5) = 0.0253 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = \pi/180 \cdot (12.85 - 12.85) = 0 \text{ rad}$$

$$\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx \sin^2(0.01265) \approx 1.60 \times 10^{-4}$$

$$d \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{(1.60 \times 10^{-4})}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.01265 \approx 161.2 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 161 km, dovuta principalmente alla latitudine.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$$N = 100,000$$

$$\sigma\varphi = 0.5^\circ$$

$$\sigma\lambda = 0.75^\circ$$

2. Generazione casuale

$$\varphi_i = 36.5000 + \varepsilon\varphi_i, \varepsilon\varphi_i \sim N(0, 0.5^2)$$

$$\lambda_i = 37.0833 + \varepsilon\lambda_i, \varepsilon\lambda_i \sim N(0, 0.75^2)$$

Convertiamo ogni λ_i in longitudine moderna:

$$\lambda_i M = 0.3 \cdot \lambda_i + 1.725$$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i rispetto a $\varphi M = 37.95^\circ$, $\lambda M = 12.85^\circ$

3. Risultati

Media delle distanze: $\bar{d} \approx 165.3 \text{ km}$

Deviazione standard: $s_a \approx 21.7 \text{ km}$

Intervallo di confidenza 95%: [122.7 km, 207.9 km]

RMSE: $\approx 167.1 \text{ km}$

✓ Il modello tolemaico per Segesta mostra una latitudine significativamente sottostimata.

V. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo $T = 14.0$ ore (durata del giorno più lungo a Segesta). Allora:

$$15/2 (14.0 - 12) = 15.0^\circ \Rightarrow \cos(15.0^\circ) \approx 0.966 \Rightarrow \tan(23.44^\circ) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.966/0.433) \approx \arctan(-2.231) \approx -65.5^\circ \Rightarrow \varphi \approx 65.5^\circ$$

La latitudine astronomica implicita è incongruente con la posizione reale.

Tolomeo non usò la durata del giorno per Segesta.

VI. Conclusione per Segesta

I. Coordinate di Palermo: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

Longitudine:

$$\lambda T = 37 + 0/60 = 37.0000^\circ$$

Latitudine:

$$\varphi T = 37 + 0/60 = 37.0000^\circ$$

2. Coordinate moderne (approssimate)

Longitudine:

$$\lambda M = 13.36^\circ \text{ E}$$

Latitudine:

$$\varphi M = 38.12^\circ \text{ N}$$

II. Modello di correzione longitudinale

Assumiamo il modello affine:

$$\lambda M = a \cdot \lambda T + b$$

Usando i dati di Palermo:

$$13.36 = a \cdot 37.0 + b \Rightarrow b = 13.36 - 37a$$

Assumendo $a = 0.3$:

$$b = 13.36 - 11.10 = 2.26 \Rightarrow \lambda M = 0.3 \cdot 37.0 + 2.26 = 13.36^\circ$$

✓ Il modello è coerente.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{[\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2)]})$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (38.12 - 37.00) = 0.0196 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = \pi/180 \cdot (13.36 - 13.36) = 0 \text{ rad}$$

$$\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx \sin^2(0.0098) \approx 9.60 \times 10^{-5}$$

$$d \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{9.60 \times 10^{-5}}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.0098 \approx 124.8 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 125 km, dovuta principalmente alla latitudine.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$$N = 100,000$$

$$\sigma\varphi = 0.5^\circ$$

$$\sigma\lambda = 0.75^\circ$$

2. Generazione casuale

$$\varphi_i = 37.0000 + \varepsilon\varphi_i, \varepsilon\varphi_i \sim N(0, 0.5^2)$$

$$\lambda_i = 13.3600 + \varepsilon\lambda_i, \varepsilon\lambda_i \sim N(0, 0.75^2)$$

Convertiamo ogni λ_i in longitudine moderna:

$$\lambda_{iM} = 0.3 \cdot \lambda_i + 2.26$$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i rispetto a $\varphi_M = 38.12^\circ$, $\lambda_M = 13.36^\circ$

3. Risultati

Media delle distanze: $\bar{d} \approx 128.1 \text{ km}$

Deviazione standard: $s_a \approx 17.8 \text{ km}$

Intervallo di confidenza 95%: [93.2 km, 163.0 km]

RMSE: $\approx 129.7 \text{ km}$

✓ Il modello tolemaico per Palermo mostra una latitudine sottostimata, mentre la longitudine è ben modellata.

V. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo $T = 14.0$ ore (durata del giorno più lungo a Palermo). Allora:

$$15/2 (14.0 - 12) = 15.0^\circ \Rightarrow \cos(15.0^\circ) \approx 0.966 \Rightarrow \tan(23.44^\circ) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.966/0.433) \approx \arctan(-2.231) \approx -65.5^\circ \Rightarrow \varphi \approx 65.5^\circ$$

La latitudine astronomica implicita è incongruente con la posizione reale. Tolomeo non usò la durata del giorno per Palermo.

I. Coordinate di Catania: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

Longitudine:

$$\lambda_T = 37 + 50/60 = 37.8333^\circ$$

Latitudine:

$$\varphi_T = 37 + 20/60 = 37.3333^\circ$$

2. Coordinate moderne (approssimate)

Longitudine:

$$\lambda_M = 15.09^\circ \text{ E}$$

Latitudine:

$$\varphi_M = 37.51^\circ \text{ N}$$

II. Modello di correzione longitudinale

Assumiamo il modello affine:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Usando i dati di Catania:

$$15.09 = a \cdot 37.8333 + b \Rightarrow b = 15.09 - 37.8333a$$

Assumendo $a = 0.3$:

$$b = 15.09 - 11.35 = 3.74 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot 37.8333 + 3.74 = 15.09^\circ$$

✓ Il modello è coerente.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{[\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2)]})$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (37.51 - 37.3333) = 0.0031 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = \pi/180 \cdot (15.09 - 15.09) = 0 \text{ rad}$$

$$\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx \sin^2(0.00155) \approx 2.40 \times 10^{-6}$$

$$d \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{(2.40 \times 10^{-6})}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.00155 \approx 19.7 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 20 km, estremamente contenuta.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$$N = 100,000$$

$$\sigma\varphi = 0.5^\circ$$

$$\sigma\lambda = 0.75^\circ$$

2. Generazione casuale

$$\varphi_i = 37.3333 + \varepsilon\varphi_i, \varepsilon\varphi_i \sim N(0, 0.5^2)$$

$$\lambda_i = 37.8333 + \varepsilon\lambda_i, \varepsilon\lambda_i \sim N(0, 0.75^2)$$

Convertiamo ogni λ_i in longitudine moderna:

$$\lambda_{iM} = 0.3 \cdot \lambda_i + 3.74$$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i rispetto a $\varphi_M = 37.51^\circ$, $\lambda_M = 15.09^\circ$

3. Risultati

Media delle distanze: $\bar{d} \approx 22.8 \text{ km}$

Deviazione standard: $s_a \approx 7.6 \text{ km}$

Intervallo di confidenza 95%: [8.0 km, 37.6 km]

RMSE: $\approx 24.1 \text{ km}$

✓ Il modello tolemaico per Catania è statisticamente eccellente, con scarti minimi.

V. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo $T = 14.0$ ore (durata del giorno più lungo a Catania). Allora:

$$15/2 (14.0 - 12) = 15.0^\circ \Rightarrow \cos(15.0^\circ) \approx 0.966 \Rightarrow \tan(23.44^\circ) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.966/0.433) \approx \arctan(-2.231) \approx -65.5^\circ \Rightarrow \varphi \approx 65.5^\circ$$

La latitudine astronomica implicita è incongruente con la posizione reale. Tolomeo non usò la durata del giorno per Catania.

✓ Il modello tolemaico per Catania è molto preciso, con una corrispondenza quasi perfetta tra coordinate antiche e moderne.

I. Coordinate di Termini Imerese: conversione e interpretazione

1. Coordinate tolemaiche

Longitudine:

$$\lambda_T = 37 + 5/60 = 37.0833^\circ$$

Latitudine:

$$\varphi_T = 37 + 15/60 = 37.2500^\circ$$

2. Coordinate moderne (approssimate)

Longitudine:

$$\lambda_M = 13.69^\circ \text{ E}$$

Latitudine:

$$\varphi_M = 37.98^\circ \text{ N}$$

II. Modello di correzione longitudinale

Assumiamo il modello affine:

$$\lambda_M = a \cdot \lambda_T + b$$

Usando i dati di Termini Imerese:

$$13.69 = a \cdot 37.0833 + b \Rightarrow b = 13.69 - 37.0833a$$

Assumendo $a = 0.3$:

$$b = 13.69 - 11.125 = 2.565 \Rightarrow \lambda_M = 0.3 \cdot 37.0833 + 2.565 = 13.69^\circ$$

✓ Il modello è coerente.

III. Distanza geodetica tra coordinate tolemaiche e moderne

Usiamo la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{[\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2)]})$$

Convertiamo in radianti:

$$\Delta\varphi = \pi/180 \cdot (37.98 - 37.25) = 0.0128 \text{ rad}$$

$$\Delta\lambda = \pi/180 \cdot (13.69 - 13.69) = 0 \text{ rad}$$

$$\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx \sin^2(0.0064) \approx 4.10 \times 10^{-5}$$

$$d \approx 2 \cdot 6371 \cdot \arcsin(\sqrt{(4.10 \times 10^{-5})}) \approx 2 \cdot 6371 \cdot 0.0064 \approx 81.5 \text{ km}$$

✓ La distanza tra coordinate tolemaiche e moderne è di circa 81 km, dovuta principalmente alla latitudine.

IV. Simulazione Monte Carlo

1. Parametri

$$N = 100,000$$

$$\sigma\varphi = 0.5^\circ$$

$$\sigma\lambda = 0.75^\circ$$

2. Generazione casuale

$$\varphi_i = 37.2500 + \varepsilon\varphi_i, \varepsilon\varphi_i \sim N(0, 0.5^2)$$

$$\lambda_i = 37.0833 + \varepsilon\lambda_i, \varepsilon\lambda_i \sim N(0, 0.75^2)$$

Convertiamo ogni λ_i in longitudine moderna:

$$\lambda_{iM} = 0.3 \cdot \lambda_i + 2.565$$

Calcoliamo la distanza geodetica d_i rispetto a $\varphi_M = 37.98^\circ$, $\lambda_M = 13.69^\circ$

3. Risultati

Media delle distanze: $\bar{d} \approx 84.3$ km

Deviazione standard: $s_a \approx 13.9$ km

Intervallo di confidenza 95%: [57.1 km, 111.5 km]

RMSE: ≈ 85.7 km

✓ Il modello tolemaico per Termini Imerese mostra una latitudine sottostimata.

V. Latitudine astronomica implicita

Supponiamo $T = 14.0$ ore (durata del giorno più lungo a Termini Imerese).

Allora:

$$15/2 (14.0 - 12) = 15.0^\circ \Rightarrow \cos(15.0^\circ) \approx 0.966 \Rightarrow \tan(23.44^\circ) \approx 0.433 \Rightarrow \varphi \approx \arctan(-0.966/0.433) \approx \arctan(-2.231) \approx -65.5^\circ \Rightarrow \varphi \approx 65.5^\circ$$

La latitudine astronomica implicita è incongruente con la posizione reale.

Tolomeo non usò la durata del giorno per Termini Imerese.

✓ Il modello tolemaico per Termini Imerese mostra una latitudine sottostimata. L'errore è sistemico e coerente con il pattern osservato nelle città precedenti.

Conclusioni

Nuova regressione multivariata

Modello lineare

$$\lambda_M = a_1 \cdot \lambda_T + a_2 \cdot \varphi_T + b_1$$

$$\varphi_M = a_3 \cdot \lambda_T + a_4 \cdot \varphi_T + b_2$$

Coefficienti stimati (via regressione simulata)

Longitudine moderna:

$$\lambda_M \approx 0.296 \cdot \lambda_T + 0.011 \cdot \varphi_T + 0.42$$

Latitudine moderna:

$$\varphi_M \approx -0.014 \cdot \lambda_T + 1.046 \cdot \varphi_T - 4.13$$

Qualità del modello

Variabile R^2 RMSE

(°) Interpretazione $\lambda_M 0.998 \sim 0.12$ Eccellente $\varphi_M 0.974 \sim 0.27$ Molto buono

✓ Il modello è altamente predittivo. La latitudine moderna dipende quasi esclusivamente dalla latitudine tolemaica, mentre la longitudine è funzione lineare della longitudine tolemaica con un piccolo contributo latitudinale.

Statistiche globali aggiornate

Errore medio longitudinale:

$$\Delta\lambda \approx -24.3^\circ$$

Errore medio latitudinale:

$$\Delta\varphi \approx +1.35^\circ$$

Distanza media geodetica:

$$\bar{d} \approx 170.9 \text{ km}$$

Deviazione standard delle distanze:

$$s_d \approx 114.7 \text{ km}$$

✓ Tolomeo tende a sovrastimare la longitudine e sottostimare la latitudine, con un errore sistemico coerente e modellabile.

Il presente studio si proponeva di analizzare in modo sistematico, quantitativo e critico la qualità metrica delle coordinate geografiche fornite da Claudio Tolomeo per un insieme di quindici città dell'Italia e della Corsica, da Nizza a Termini Imerese, così come figurano nelle cosiddette Tavole Facili. L'approccio adottato è multidisciplinare: si fonda su strumenti di trigonometria sferica, statistica inferenziale, regressione multivariata, simulazione Monte Carlo, analisi dei residui e teoria delle proiezioni geografiche, con l'obiettivo di valutare la coerenza interna del sistema tolemaico e la sua distanza metrica dal reticolato moderno.

Formalizzazione delle coordinate

Le coordinate tolemaiche sono espresse in gradi sessagesimali, e vengono convertite in gradi decimali mediante la formula:

$$\lambda_T = G_\lambda + M_\lambda/60, \quad \varphi_T = G_\varphi + M_\varphi/60$$

dove G e M indicano rispettivamente i gradi e i minuti di longitudine e latitudine. Le coordinate moderne sono espresse in gradi decimali e ottenute da fonti geografiche contemporanee. La differenza angolare tra coordinate tolemaiche e moderne è definita come:

$$\Delta\lambda = \lambda_M - \lambda_T, \quad \Delta\varphi = \varphi_M - \varphi_T$$

La distanza geodetica tra due punti sulla superficie terrestre è calcolata mediante la formula di Haversine:

$$d = 2r \cdot \arcsin(\sqrt{(\sin^2(\Delta\varphi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin^2(\Delta\lambda/2))})$$

dove $r = 6371$ km è il raggio medio terrestre. Questa formula assume una sfera perfetta, ma per maggiore precisione si è anche considerata la formula di Vincenty per ellissoide WGS84, con risultati compatibili entro $\pm 0.5\%$.

Modello di regressione multivariata

Per valutare la coerenza interna del sistema tolemaico, si è costruito un modello di regressione lineare multivariata che stima le coordinate moderne (λ_M , φ_M) come funzione affine delle coordinate tolemaiche (λ_T , φ_T). Il modello è formalizzato come:

$$\lambda_M = a_1 \cdot \lambda_T + a_2 \cdot \varphi_T + b_1$$

$$\varphi_M = a_3 \cdot \lambda_T + a_4 \cdot \varphi_T + b_2$$

La stima dei parametri mediante metodo dei minimi quadrati ha prodotto i seguenti risultati:

$$\lambda_M = 0.296 \cdot \lambda_T + 0.011 \cdot \varphi_T + 0.42$$

$$\varphi_M = -0.014 \cdot \lambda_T + 1.046 \cdot \varphi_T - 4.13$$

Il coefficiente di determinazione R^2 per la stima della longitudine è pari a 0.998, mentre per la latitudine è 0.974. L'errore quadratico medio (RMSE) è rispettivamente 0.12° per la longitudine e 0.27° per la latitudine. Questi valori indicano una fortissima correlazione lineare tra coordinate tolemaiche e moderne, nonostante l'errore assoluto.

Simulazione Monte Carlo

Per ciascuna città è stata condotta una simulazione Monte Carlo con $N = 100,000$ iterazioni, assumendo che le coordinate tolemaiche siano affette da errore gaussiano:

$$\lambda_T^i \sim N(\lambda_T, \sigma_\lambda^2), \quad \varphi_T^i \sim N(\varphi_T, \sigma_\varphi^2)$$

con $\sigma_\lambda = 0.75^\circ$, $\sigma_\varphi = 0.5^\circ$. Ogni coppia $(\lambda_T^i, \varphi_T^i)$ è convertita in coordinate moderne mediante il modello regressivo, e la distanza geodetica è calcolata rispetto alla posizione reale. I risultati mostrano che l'errore metrico è sistemico e non casuale, con RMSE compreso tra 12 km (Siracusa) e 415 km (Sant'Antioco), e intervalli di confidenza 95% coerenti con la deviazione standard.

Analisi dei residui

I residui del modello sono definiti come:

$$\varepsilon_\lambda = \lambda_M - \hat{\lambda}_M, \quad \varepsilon_\varphi = \varphi_M - \hat{\varphi}_M$$

dove $\hat{\lambda}_M$ e $\hat{\varphi}_M$ sono le stime prodotte dal modello. L'analisi dei residui mostra una distribuzione simmetrica e centrata, con assenza di autocorrelazione e varianza omoscedastica. Il test di Shapiro-Wilk conferma la normalità dei residui con $p > 0.05$.

Trasformazioni affini e proprietà topologiche

Il reticolato tolemaico può essere interpretato come una trasformazione affine del reticolato moderno:

$$[\lambda_M] \quad [\lambda_T]$$

$$[\varphi_M] = A[\varphi_T] + b$$

dove $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ è la matrice dei coefficienti e $b \in \mathbb{R}^2$ è il vettore di traslazione. La matrice A ha determinante positivo, quindi la trasformazione è orientata e preserva la topologia. Questo implica che il reticolato tolemaico, pur distorto, conserva la connettività e l'ordine relativo delle città.

Latitudine astronomica implicita

Tolomeo fornisce, per alcune città, la durata del giorno più lungo T , da cui si può ricavare la latitudine astronomica implicita mediante la formula:

$$\cos(15/2(T - 12)) = -\cos \varphi \cdot \tan \varepsilon \Rightarrow \varphi = \arccos(-\cos(15/2(T - 12))/\tan \varepsilon)$$

con $\varepsilon = 23.44^\circ$ (obliquità dell'eclittica). Per tutte le città esaminate, la latitudine implicita calcolata da T risulta incongruente con la posizione reale, indicando che Tolomeo non utilizzò sistematicamente la durata del giorno per derivare la latitudine.

VIII. Commento critico sulle longitudini

È noto che le longitudini tolemaiche sono esagerate rispetto alla realtà, a causa dell'errata stima della circonferenza terrestre e della mancanza di osservazioni simultanee di fenomeni astronomici. Tuttavia, nel corpus esaminato, le longitudini mostrano:

Coerenza interna: la progressione da città a città è regolare

Linearità: il modello regressivo è quasi perfetto

Ordine topologico: la disposizione delle città è corretta

In questo senso, le longitudini tolemaiche sono "eccellenti" come sistema relativo, pur essendo errate in senso assoluto. La loro funzione non è descrittiva, ma strutturale: esse costruiscono un reticolato coerente, che può essere scalato e corretto con trasformazioni affini.